Aufgaben Schwingungen (3)

99. Prüfung 1998/99
An einem 20 m langen Kranseil hängt ein Betonteil der Masse 1,0 t. Auf Grund einer Unachtsamkeit des Kranführers beginnt das Seil mit der maximalen Auslenkung von 5,0° zu schwingen.
a) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit, die das Betonteil im Verlauf der ersten Periode erreicht.
b) Berechnen Sie die Periodendauer und stellen Sie die horizontale Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar.
Geben Sie mindestens zwei Gültigkeitsbedingungen für Ihre verwendeten Gleichungen an.
c) Begründen Sie, dass die Kraft, die das Seil belastet, beim Durchschwingen der Gleichgewichtslage am größten ist. Berechnen Sie den Betrag dieser Kraft.

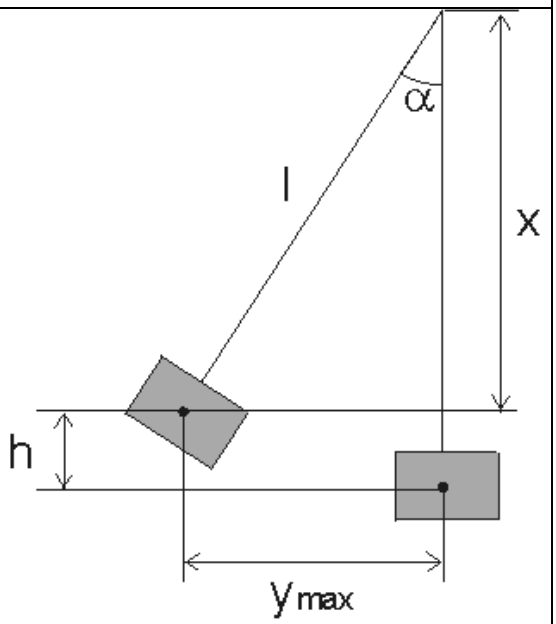
73. a) Ein Federpendel mit der Federkonstanten D = 12 N/m wird um 12 cm ausgelenkt und losgelassen. Eine Masse von 2 kg hängt an der Feder und beginnt zu schwingen.
Bestimmen Sie den Abstand der Masse zur Ruhelage, den Geschwindigkeitsbetrag und den Beschleunigungsbetrag 10 s nach dem ersten Durchgang durch die Ruhelage, falls die Schwingung reibungsfrei verläuft.
b) Zeichnen Sie für die Elongation, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung für die ersten 2 Sekunden der Schwingung das entsprechende Diagramm.

198. Die Elongation einer Sinusschwingung von 15 s Dauer und 10 cm Amplitude verdoppelt sich innerhalb von 1 s. Wie groß sind diese Elongationen? (es gilt: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

203. Die Karosserie (m= 800 kg) eines Lastkraftwagens senkt sich bei einer Zuladung von 1,8 t um 6 cm.
a) Welche Periodendauer ergibt sich daraus?
b) Welche Periodendauer hat die leere Karosse?
c) Bei welcher Zuladung ergibt sich die doppelte Periodendauer gegenüber b)?

204. Ein im Wasser schwimmender Holzquader von der Höhe h und der Dichte ρ_K wird bis zur Oberkante ins Wasser gedrückt und losgelassen. Er führt nun eine auf- und niederschwingende Bewegung aus. Welcher Ausdruck ergibt sich für die Periodendauer?

Lösungen
99.

geg.:	$l = 20\,m$ $m = 1 \cdot 10^3\,kg$ $\alpha = 5°$	ges.:	a) v
Lösung:	1. Wie hoch wird das Betonteil gehoben? Aus der Skizze kann man ablesen: $\cos\alpha = \frac{x}{l}$ $x = \cos\alpha \cdot l$ $x = 19{,}92\,m$ Damit wird das Betonteil 0,076 m angehoben und besitzt gegenüber der Ruhelage potenzielle Energie. Diese wird beim Zurückschwingen in kinetische Energie umgewandelt. $E_{pot} = E_{kin}$ $m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2$ $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ $v = 1{,}22\,\frac{m}{s}$		

	b) Schwingungsdauer: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ $T = 8{,}97\,s$ Die grafische Darstellung erfolgt nach der Gleichung $y = y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ Dabei berechnet sich die Amplitude entsprechend der Skizze nach $\sin\alpha = \frac{y_{max}}{l}$ $y_{max} = \sin\alpha \cdot l$ $y_{max} = 1{,}7\,m$ Die grafische Darstellung ist eine Sinuskurve mit der Amplitude 1,7 m und den Nulldurchgängen 0s; 4,49s und 8,97s. Gültigkeitsbedingungen: Reibungsfrei, das Betonteil wird als Massepunkt betrachtet, die Gleichungen gelten nur für kleine Amplituden. c) Auf das Seil wirken zwei Kräfte: Die Radialkraft und die Normalkraft. Radialkraft (hält das Betonteil auf der Kreissegmentbahn): $F_R = \frac{m \cdot v^2}{r}$ Normalkraft (entsteht durch die Anziehungskraft der Erde und wirkt in Richtung des Seiles) : $F_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$ In der Gleichgewichtslage ist die Geschwindigkeit am größten -> die Radialkraft ist am größten. In der Gleichgewichtslage ist der Winkel 0°, damit ist der Kosinus = 1 und die Normalkraft entspricht der Gewichtskraft. $F = F_R + F_N$ $F = 9{,}9\,kN$
Antwort:	a) Die maximale Geschwindigkeit erreicht das Betonteil beim Zurückschwingen im Ruhepunkt. Diese Geschwindigkeit beträgt 1,22 m/s. c) Die Kraft in der Gleichgewichtslage beträgt 9,9 kN.

73.

geg.:	$m = 2\,kg$ $D = 12\,\frac{N}{m}$ $\hat{y} = 0{,}12\,m$ $t = 10\,s$	ges.:	y, v, a
Lösung:	Zuerst muss die Schwingungsdauer berechnet werden: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$ $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2\,kg}{12\,\frac{N}{m}}}$ $T = 2{,}57\,s$ Wenn das Pendel bei einem Abstand von 12 cm von der Ruhelage losgelassen wird, erreicht es nach 2,57s/4=0,6425 s die Ruhelage. In der Schwingungsgleichung muss diese Zeit berücksichtigt werden und zu den 10 s dazugezählt werden.		

	Auf der anderen Seite haben die Elogationen dann negative Werte. Damit lässt sich über die Gleichung der harmonischen Schwingung die Elongation berechnen: $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ Da die Schwingung in einem Umkehrpunkt beginnt, muss die Verschiebung um die Viertelschwingung beachtet werden. Die Gleichung muss eine Kosinus-Kurve ergeben. Dass erreicht man durch die Addition von $\frac{\pi}{2}$: $y = \hat{y} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$ Der Vorgang beginnt eine viertel Schwingung vor dem Nulldurchgang. Gesucht ist die Auslenkung 10 s nach diesem Durchgang. Also muss zu der Zeit noch die seit dem Start vergangene Zeit addiert werden. $y = \hat{y} \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t + \frac{T}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$ $y = 0{,}12\,\text{m} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2{,}57\,\text{s}} \cdot (10\,\text{s} + 0{,}6425\,\text{s}) + \frac{\pi}{2}\right)$ $y = 0{,}07\,\text{m}$ $y = 7\,\text{cm}$ Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des Weges (y) nach der Zeit: $v = \frac{dy}{dt}$ $v = \hat{y} \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$ $v = 0{,}12\,\text{m} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{2{,}57\,\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{2{,}57\,\text{s}} \cdot (10\,\text{s} + 0{,}6425\,\text{s}) + \frac{\pi}{2}\right)$ $v = -0{,}23\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ Die Beschleunigung ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit: $a = \frac{dv}{dt}$ $a = -\hat{y} \cdot \omega^2 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$ $a = -0{,}12\,\text{m} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{2{,}57\,\text{s}}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2{,}57\,\text{s}} \cdot (10\,\text{s} + 0{,}6425\,\text{s}) + \frac{\pi}{2}\right)$ $a = -0{,}45\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Antwort:	Das Pendel ist nach 10 s 7 cm vom Ruhepunkt auf der gleichen Seite entfernt. Dort hat es noch eine Geschwindigkeit von -0,23 m/s, bewegt sich also auf die Ruhelage zu. Die Beschleunigung beträgt -0,45 m/s

198.

geg.:	$\hat{y}=10\,cm$ $T=15\,s$ $\Delta t=1\,s$	ges.:	y_1, y_2

Lösung:

Die Elongation einer Sinusschwingung erhält man mit der Schwingungsgleichung

$$y=\hat{y}\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

In dieser Gleichung sind die Amplitude und die Kreisfrequenz bekannt:

$$\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}$$

Gefragt ist eine Elongation, die sich eine Sekunde später verdoppelt hat. Die zweite Elongation ist also doppelt so groß wie die erste:

$$2\cdot y_1=y_2$$

Die beiden Gleichungen für die beiden Elongationen lauten:

$$y_1=\hat{y}\cdot\sin(\omega\cdot t_1)$$

$$y_2=\hat{y}\cdot\sin(\omega\cdot(t_1+\Delta t))$$

Die beiden Gleichungen kann man zusammenführen:

$$2\cdot y_1=y_2$$

$$2\cdot\hat{y}\cdot\sin(\omega\cdot t_1)=\hat{y}\cdot\sin(\omega\cdot(t_1+\Delta t))$$

In dieser Gleichung ist nur noch die Zeit t_1 unbekannt. Das ist die Zeit für die erste Elongation. Die zweite Zeit ist dann 1s später.
Die Gleichung muss nach der gesuchten Größe umgestellt werden. Dass kann ein Rechner schaffen oder man muss selber Hand anlegen:

$$2\cdot\sin(\omega\cdot t_1)=\sin(\omega\cdot(t_1+\Delta t))$$

$$2\cdot\sin(\omega\cdot t_1)=\sin(\omega\cdot t_1)\cos(\omega\cdot\Delta t)+\cos(\omega\cdot t_1)\sin(\omega\cdot\Delta t)$$

Würg, das sieht fast unlösbar aus. Erst mal die gleichen Sinüsse auf eine Seite:

$$2\cdot\sin(\omega\cdot t_1)-\sin(\omega\cdot t_1)\cos(\omega\cdot\Delta t)=\cos(\omega\cdot t_1)\sin(\omega\cdot\Delta t)$$

und ausklammern:

$$\sin(\omega\cdot t_1)\cdot(2-\cos(\omega\cdot\Delta t))=\cos(\omega\cdot t_1)\sin(\omega\cdot\Delta t)$$

Da sin durch cos gleich tan ist, teilt man durch den cos:

$$\frac{\sin(\omega\cdot t_1)}{\cos(\omega\cdot t_1)}\cdot(2-\cos(\omega\cdot\Delta t))=\sin(\omega\cdot\Delta t)$$

$$\tan(\omega\cdot t_1)\cdot(2-\cos(\omega\cdot\Delta t))=\sin(\omega\cdot\Delta t)$$

Damit steht die gesuchte Größe auf einer Seite und kann berechnet werden:

$$\tan(\omega\cdot t_1)\cdot=\frac{\sin(\omega\cdot\Delta t)}{(2-\cos(\omega\cdot\Delta t))}$$

Beim Berechnen ist der Taschenrechner auf RAD umzuschalten, sonst kommt Grütze raus!
Man erhält:

$$t_1=0{,}86\,s$$

Damit ist auch t_2 bekannt: 1,86 s
Mit diesen Zeiten werden die Elongationen berechnet:

	$y_1 = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t_1)$ $y_1 = 10\,cm \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{15\,s} \cdot 0{,}86\,s\right)$ $y_1 = 3{,}5\,cm$ $y_2 = 7\,cm$
Antwort:	Der Schwinger hat nach 0,86 eine Elongation von 3,5 cm. Eine Sekunde später beträgt die Elongation 7 cm.

203.

geg.:	$m_1 = 800\,kg$ $m_2 = 1{,}8 \cdot 10^3\,kg$ $s = 6 \cdot 10^{-2}\,m$	ges.:	a) T

Lösung:

a) Karosserie und Fahrgestell sind bei jedem Auto über Federn verbunden. Damit werden Stöße abgefedert.
Jede Feder ist aber ein schwingungsfähiges System, so dass man einem Fahrzeug eine Schwingungsdauer zuordnen kann. Wird das Fahrzeug mit dieser Schwingungsdauer z.B. durch Unebenheiten der Straße erregt, kann es zu unangenehmen Resonanzerscheinungen kommen, die die Fahrsicherheit gefährden.
Die Schwingungsdauer einer Feder berechnet sich allgemein mit

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

m ist die Masse des schwingenden Körpers und D die Federkonstante. Die Masse ist die Gesamtmasse des LKW, also Leermasse plus Zuladung:

$$m = m_1 + m_2$$

$$m = 2{,}6 \cdot 10^3\,kg$$

Die Federkonstante kann man aus der Absenkung des LKW, also der Längenänderung der Federn berechnen:

$$D = \frac{F}{s}$$

F ist die Gewichtskraft der Zuladung und s der Weg, um den die Federn ihre Länge ändern:

$$D = \frac{m_2 \cdot g}{s}$$

$$D = \frac{1{,}8 \cdot 10^3\,kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}}{6 \cdot 10^{-2}\,m}$$

$$D = 294{,}3 \cdot 10^3 \frac{N}{m}$$

Damit kann die Schwingungsdauer berechnet werden:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2{,}6 \cdot 10^3\,kg}{294{,}3 \cdot 10^3 \frac{N}{m}}}$$

$$T = 0{,}59\,s$$

b) Zur Berechnung der Schwingungsdauer des leeren Fahrzeuges wird die gleiche Federkonstante verwendet. Die ist ja für die Federn konstant. Die Masse ist aber nur noch die Leermasse. Dadurch schwingt der LKW schneller, die Schwingungsdauer muss also kleiner werden.

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 10^3\,kg}{294{,}3 \cdot 10^3 \frac{N}{m}}}$$

$$T = 0{,}33\,s$$

	c) Bei dieser Teilaufgabe ist die Masse m_2 gesucht und T gegeben. Aus a) ist bekannt: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}}$ Diese Gleichung muss nach der Zuladung m2 umgestellt werden: $T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m_1 + m_2}{D}$ $\frac{T^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{m_1 + m_2}{D}$ $\frac{T^2 \cdot D}{4 \cdot \pi^2} = m_1 + m_2$ $\frac{T^2 \cdot D}{4 \cdot \pi^2} - m_1 = m_2$ Für T wird 0,66 s eingesetzt. Damit ist die gesuchte Masse berechenbar: $m_2 = \frac{0.66^2\,s^2 \cdot 294{,}3 \cdot 10^3 \frac{N}{m}}{4 \cdot \pi^2} - 800\,kg$ $m_2 = 2450\,kg$
Antwort:	Der beladene LKW schwingt mit 0,59 s, der leere mit 0,33 s. Damit die Schwingungsdauer 0,66 s beträgt, müssen 2450 kg zugeladen werden.

204.

geg.:		ges.:	
Lösung:	Wird der schwimmende Holzquader ins Wasser eingetaucht, verspürt er die Auftriebskraft, die ihn wieder in die Ruhelage zurückbringen will. Die Auftriebskraft ist nach dem Archimedischen Gesetz so groß, wie die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit, also $F_A = \rho_W \cdot V \cdot g$ Da diese Kraft proportional zur Eintauchtiefe ist (Holzquader), führt der Quader nach dem Loslassen eine harmonische Schwingung aus. Die Richtgröße D ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der Auftriebskraft und der Eintauchtiefe s: $F_A = D \cdot s$ $D = \frac{\rho_W \cdot V \cdot g}{s}$ Die Schwingungsdauer eines solchen Systems berechnet sich $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot s}{\rho_W \cdot V \cdot g}}$ Die Masse m durch das Volumen ist aber die Dichte des Quaders: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_K \cdot s}{\rho_W \cdot g}}$ Da die Eintauchtiefe genau h war, ergibt sich: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_K \cdot h}{\rho_W \cdot g}}$		
Antwort:	$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_K \cdot h}{\rho_W \cdot g}}$		