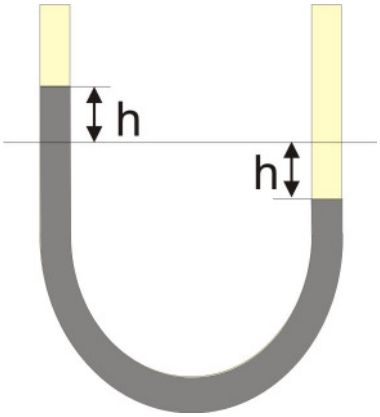
Schwingungen

821. In einem U-Rohr wird eine Flüssigkeit zum Schwingen angeregt.
a) Überprüfen Sie, ob diese Schwingung harmonisch verläuft, wenn Reibungsverluste unberücksichtigt bleiben.
b) Für die Schwingungsdauer einer solchen Flüssigkeitssäule gilt die Gleichung:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{2g}}$$

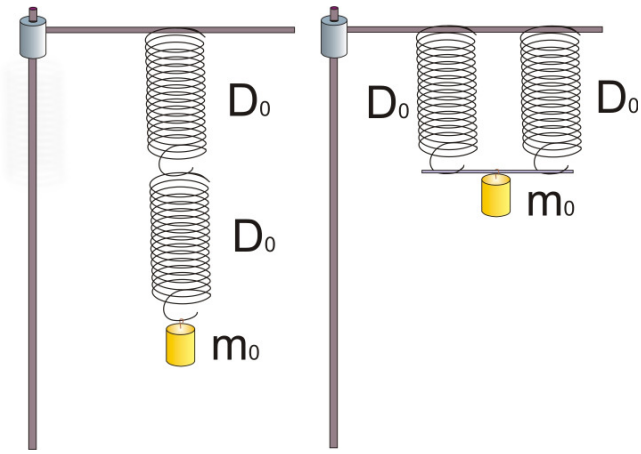
Dabei ist ℓ die gesamte Länge der Flüssigkeitssäule. Interpretieren Sie diese Gleichung.



388. Weshalb kann eine im Wasser schwimmende Holzkugel keine harmonischen Schwingungen ausführen?

683. (Abi Grundkurs 2008)
Eine Pendeluhr zeigt bei einer Pendellänge 1000,0 mm die genaue Uhrzeit an. Die Pendellänge vergrößert sich durch Temperaturänderung um 1,0 mm. Welche Differenz ergibt sich durch diese Verlängerung nach 24 Stunden zwischen der genauen und der von der Uhr angezeigten Zeit?

670. Ein Federschwinger habe die Federkonstante D_0; an ihn wird die Masse m_0 gehängt.
Die Schwingungsdauer dieses Federschwingers sei T_0. Aus jeweils zwei Federschwingern dieser Art werden die im Bild dargestellten Anordnungen aufgebaut.
a) Wie groß sind die Federkonstanten D_1 und D_2 der beiden Anordnungen?
b) Berechnen Sie die sich daraus ergebenden Schwingdauern T_1 und T_2 der beiden Anordnungen als Vielfaches von T_0..
c) Die gleichen Massen m_0 der Anordnungen (1) und (2) sollen durch andere Massen m_1 bzw. m_2 derart ersetzt werden, dass jede der beiden Anordnungen die Schwingungsdauer T_0 ausweist. Geben Sie die Verhältnisse $m_1 : m_0$ und $m_2 : m_0$ an.



630. Eine Pendeluhr geht an einem Tag genau eine Minute nach. Wie muss der in genau 50,00 cm Abstand vom Drehpunkt des Pendels gelegene Massenmittelpunkt verändert werden?

Lösungen

821.

Eine Schwingung verläuft dann harmonisch, wenn die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist.
Im konkreten Fall muss gezeigt werden, dass die Kraft, die die Flüssigkeitssäule in die Gleichgewichtslage zurückbewegt, von der Höhe h direkt proportional abhängt.

Wird die Säule aus der Gleichgewichtslage herausgebracht, wird die rechte Säule kleiner und die linke Säule größer. Damit ist die linke Säule um die Höhe 2h größer als die rechte Säule. Diese zusätzliche Masse der linken Säule bringt die Kraft auf, die das ganze System zurückbewegt.
Wie groß ist diese Kraft?
Nun, es ist die Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule mit 2h

$$F = m \cdot g$$

Die Masse der Flüssigkeit ist über die Dichte zu bestimmen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \rho \cdot V$$

Damit erhält man für die Kraft

$$F = \rho \cdot V \cdot g$$

Es muss aber die Höhe h in der Gleichung auftauchen.
Das Volumen ist von der Höhe abhängig, es ist einfach die Fläche der Säule mal deren Höhe:

$$V = A \cdot 2h$$

Die Kraft ist jetzt:

$$F = \rho \cdot A \cdot 2 \cdot h \cdot g$$

Die Kraft ist demnach direkt proportional zu Höhe h, da die anderen Größen von h unabhängig und konstant sind.
Die Schwingung läuft harmonisch ab.

388. harmonische Schwingung: rücktreibende Kraft prop. zur Auslenkung, rücktreibende Kraft = Auftrieb, bei einer Kugle ist der Auftrieb nicht prop. zur Eintauchtiefe,

683.

geg.:	$\ell_1 = 1000,0\,\text{mm}$ $\ell_2 = 1001,0\,\text{mm}$ $t = 24\,\text{h}$	ges.:	Δt
Lösung:	Durch die Verlängerung des Pendels vergrößert sich dessen Schwingungsdauer. In der Uhr werden die Pendelschläge gezählt und bei jedem Schlag eine Aktion durchgeführt (z.B. dreht sich ein Zahnrad ein Stück weiter). Wenn die Schwingungsdauer größer wird, zählt die Uhr im Vergleich zur genauen Zeit weniger Schläge und geht nach. Die Schwingungsdauer der genau gehenden Uhr beträgt: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell_1}{g}}$ $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1000,0 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$ $T = 2,006\,\text{s}$ Die Schwingungsdauer des Pendels vergrößert sich durch die Verlängerung auf 2,007s. Ein Tag hat genau 86 400 s. Die Uhr mit dem verlängerten Pendel verliert pro Schwingung 0,001 s, geht also um diese Zeit nach. Da das Pendel in den 24 Stunden $\frac{86\,400\,\text{s}}{2,007\,\text{s}} = 43\,049,3\,\text{mal}$ schwingt, zeigt die Uhr $43\,049,3 \cdot 0,001\,\text{s} = 43\,\text{s}$ zu wenig an.		
Antwort:	Die Uhr geht um 43 s nach.		

670.
a) Reihenschaltung zweier Federn: Werden zwei Federn hintereinander geschaltet, spürt sowohl die obere als auch die untere Feder die Masse m_0. Damit dehnen sich die obere und die untere Feder so aus, als würde sie alleine mit der Masse belastet werden. Das heißt aber, dass sich jede Feder um die Länge ausdehnt, um die sie auch alleine länger würde. Die beiden Federn dehnen sich demnach doppelt so weit aus wie eine Feder alleine.
Die Federkonstante ist definiert durch:

$$D=\frac{F}{s}$$

Für eine Feder ist das

$$D_0=\frac{F}{s_0}$$

Werden die beiden Federn hintereinander geschaltet, bleibt die Kraft F gleich und die Ausdehnung ins $2s_0$.
Damit ist

$$D_1=\frac{F}{2s_0}$$

Aus der Gleichung für eine Feder lässt sich s_0 bestimmen:

$$s_0=\frac{F}{D_0}$$

und in D_1 eingesetzt:

$$D_1=\frac{F}{2\frac{F}{D_0}}$$

$$D_1=\frac{D_0}{2}$$

Fertig.

Parallelschaltung zweier Federn: Da jede Feder nur die halbe Kraft spürt, dehnen sich die beiden Federn zusammen nur noch halb so weit aus. Es gilt dann:

$$D_2=2\cdot D_0$$

b) Die Schwingungsdauer des Schwingers mit einer Feder ist

$$T_0=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_0}{D_0}}$$

und des Schwingers mit zwei Federn hintereinander

$$T_1=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_0}{D_1}}$$

Die Federkonstante D_1 kann durch D_0 ersetzt werden:

$$T_1=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{2\cdot m_0}{D_0}}$$

Die beiden Gleichungen für die Schwingungsdauern müssen nun zusammengeführt werden, denn es soll ja T_1 im Verhältnis zu T_0 angegeben werden. Dazu muss man etwas finden, was in beiden Gleichungen enthalten ist, danach umstellen und gleichsetzen.
Beide Gleichungen enthalten die Federkonstante D_0. Die erste Gleichung danach umgestellt lautet:

$$D_0 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m_0}{T_0^2}$$

und die zweite:

$$D_0 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot m_0}{T_1^2}$$

Gleichsetzen und alles kürzen, was zu kürzen geht:

$$4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m_0}{T_0^2} = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot m_0}{T_1^2}$$

$$\frac{1}{T_0^2} = \frac{2}{T_1^2}$$

Jetzt muss nur noch nach T_1 umgestellt werden:

$$T_0^2 = \frac{T_1^2}{2}$$

$$T_1^2 = 2 \cdot T_0^2$$

$$T_1 = \sqrt{2} \cdot T_0$$

Fertig.

Für die beiden Federn nebeneinander geschaltet gilt

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_0}{D_2}}$$

und D_2 wieder ersetzt:

$$T_2 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_0}{2 \cdot D_0}}$$

Wenn man diese Gleichung nach D_0 umstellt und wieder mit der ersten gleichsetzt, erhält man gekürzt:

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot T_0$$

c) Federn hintereinander:
Aus der vorherigen Aufgabe ist bekannt, dass

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_0}{D_0}}$$

Die Masse m_0 soll durch m_1 ersetzt werden.

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_1}{D_0}}$$

und die neue Schwingungsdauer soll jetzt so groß sein wie T_0.

$$T_1 = T_0$$

Damit erhält man

$$2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{2\cdot m_1}{D_0}}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_0}{D_0}}$$

$$\frac{2\cdot m_1}{D_0}=\frac{m_0}{D_0}$$

$$2\cdot m_1=m_0$$

$$m_1=\frac{m_0}{2}$$

Die neue Masse muss halb so groß sein wie die Masse m_0 oder
$m_1:m_0=1:2$

Federn nebeneinander:

$$T_2=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{2\cdot D_0}}$$

Wieder gleichsetzen:

$$2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{2\cdot D_0}}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_0}{D_0}}$$

$$\frac{m_2}{2\cdot D_0}=\frac{m_0}{D_0}$$

$$\frac{m_2}{2}=m_0$$

$$m_2=2\cdot m_0$$

Die neue Masse muss doppelt so groß sein wie die Masse m_0 oder
$m_2:m_0=2:1$

630.

geg.:	$\Delta t = 1\,\text{min} = 60\,\text{s}$ $\ell = 50{,}00\,\text{cm} = 500{,}0\,\text{mm}$ $t = 1\,\text{d} = 24\,\text{h} = 86400\,\text{s}$	ges.:	$\Delta\ell$

Lösung:

Da die Uhr nachgeht, schwingt das Pendel zu langsam, es ist zu lang. Es müssen durch die Verkürzung in der gleichen Zeit mehr Schwingungen gemacht werden, damit die Uhr wieder richtig geht, die Schwingungsdauer T muss verkürzt werden.

Die Schwingungsdauer muss im gleichen Maße kürzer werden, wie die Uhr schneller werden soll.
Beispiel: Wenn die Uhr in 24 Stunden nur 12 Umdrehungen schaffen würde, muss sie zum richtigen Gehen doppelt so schnell werden. Dazu muss das Pendel doppelt so schnell schwingen, also die Dauer für eine Schwingung halbiert werden.
Die Schwingungsdauer T ist also umgekehrt proportional zu der Zeit t, die die Uhr anzeigt. Kurze Schwingungsdauer bedeutet schnelle Uhr

Die Schwingungsdauer eines Pendels berechnet sich nach der Gleichung

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Da die Fallbeschleunigung g konstant ist, gilt:

$$T \sim \sqrt{\ell}$$

$$T^2 \sim \ell$$

Wenn man zwei Pendel betrachtet, dann gilt:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

oder bei Betrachtung der Zeit, die die Uhr anzeigt:

$$\frac{t_2^2}{t_1^2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

Nun kann man folgendes festlegen:

Vor der Korrektur:

$t_1 = 86400\,\text{s} - 60\,\text{s}$

nämlich die richtige Zeit minus die Minute, die die Uhr nachgeht.

$\ell_1 = 500{,}0\,\text{mm}$

Nach der Korrektur:

$t_2 = 86400\,\text{s}$

ℓ_2 ist de gesuchte neue Länge.

Damit kann man die gesuchte Größe berechnen:

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

$$\ell_2 = \frac{t_1^2}{t_2^2} \cdot \ell_1$$

$$\ell_2 = \frac{(86400\,\text{s} - 60\,\text{s})^2}{(86400\,\text{s})^2} \cdot 500{,}0\,\text{mm}$$

$$\ell_2 = 499{,}3\,\text{mm}$$

Antwort: Das Pendel muss um 0,7 mm verkürzt werden.