Aufgaben Magnetfeld einer Spule

83. In einer Spule $(N=30, \ell=0{,}50\,m)$, die in Ost-West-Richtung liegt, wird eine Magnetnadel gegen die Nord-Süd-Richtung um 11° ausgelenkt. Berechnen Sie die Stärke des Stromes in der Spule! Die waagerechte Komponente des Erdmagnetfeldes beträgt $1{,}7\cdot10^{-5}\,T$.

390. Um zu messen, wie stark das homogene Magnetfeld eines Elektromagneten ist, wird ein 3,0 cm langer, waagerechter Leiter an zwei flexiblen Drähten so in das horizontal verlaufende Magnetfeld gehängt, dass er senkrecht zu den Magnetfeldlinien steht. Der Leiter hängt an einer empfindlichen Waage. Wenn die Stromstärke im Leiter 1,00 A beträgt, zeigt die Waage 1,04 g mehr an als ohne Strom. Wie groß ist die magnetische Flussdichte des Magnetfeldes?

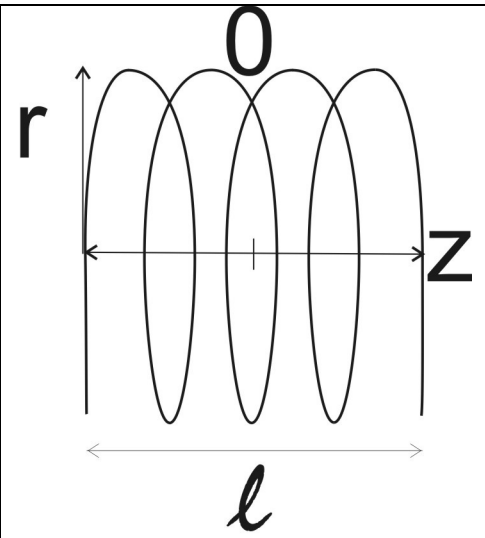
389. Die bekannte Formel zur Berechnung der mag. Flussdichte in einer langen Spule

$$B=\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}$$

ist eine Näherungsformel, die nur dann Verwendung finden kann, wenn die Länge der Spule deutlich größer als der Durchmesser der Spule ist. Wenn das nicht der Fall ist, gilt die Gleichung

$$B(z)=\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z+\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(z+\frac{\ell}{2}\right)^2+r^2}}-\frac{z-\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(z-\frac{\ell}{2}\right)^2+r^2}}\right)$$

Dabei ist z der Abstand des Ortes, an dem die Flussdichte bestimmt wird von der Mitte der Spule aus gemessen. Die Mitte der Spule ist also z=0 und die Ränder rechts und links sind $z=\pm\frac{\ell}{2}$



a) Zeigen Sie, dass sich für eine lange Spule die magn. Flussdichte in der Mitte mit der Näherungsformel berechnen lässt.

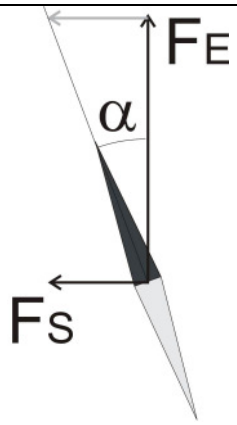
b) Zeigen Sie, dass für eine lange Spule die magn. Flussdichte am Rand der Spule halb so groß ist wie in der Mitte der Spule.

c) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Abstand z und mag. Flussdichte in einem Diagramm für verschieden Verhältnisse Durchmesser/Länge dar. ($\frac{d}{\ell}$ z.B. 0,1; 0,5; 1)

Setzen Sie in der Gleichung alle konstanten Größen gleich 1.

d) Bestimmen Sie das Verhältnis $\frac{d}{\ell}$, für dass in der Mitte der Spule die mit der Näherungsformel berechnete mag. Flussdichte um mehr als 1% vom exakt berechneten Wert abweicht.

Lösungen
83.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$N=30$
$\ell=0{,}50\,\text{m}$
$\alpha=11°$
$B_E=1{,}7\cdot10^{-5}\,\text{T}$</td><td>ges.:</td><td>I</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="3">Die Magnetnadel richtet sich im Magnetfeld der Erde ohne Spule in Nord-Süd-Richtung aus. Die Spule erzeugt ein Magnetfeld, dass senkrecht zum Erdmagnetfeld steht und die Nadel aus ihrer ursprünglichen Richtung ablenkt. Diese Ablenkung ist umso größer, je stärker das Magnetfeld der Spule ist und das wiederum hängt direkt von der Stromstärke durch die Spule ab.
Aus der Ablenkung der Magnetnadel kann man also direkt auf die Stromstärke schließen.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Die Kraft, die ein Magnetfeld ausübt, ist proportional zur magnetischen Flussdichte B. Verdoppelt sich das Magnetfeld, wirkt auch eine doppelt so große Kraft.
Auf die Nadel wirken zwei Kräfte, die senkrecht zueinander stehen. Das sind die Kräfte F_E vom Erdmagnetfeld und F_S von der Spule. Wie an der Skizze zu erkennen ist, kann man aus diesen beiden Kräften ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Der Winkel lässt sich dann mit
$\tan\alpha=\frac{F_S}{F_E}$
berechnen.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Da Kraft mit magnetische Flussdichte zueinander proportional sind, kann man auch schreiben:
$\tan\alpha=\frac{B_S}{B_E}$
B_E und α sind bekannt und in B_S steckt die gesuchte Stromstärke:
$B_S=\mu_0\cdot\mu_r\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}$
Nun noch einsetzen, umstellen, ausrechnen und fertig:
$\tan\alpha=\frac{B_S}{B_E}$
$B_S=\tan\alpha\cdot B_E$
$\mu_0\cdot\mu_r\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}=\tan\alpha\cdot B_E$
$I=\frac{\tan\alpha\cdot B_E\cdot\ell}{\mu_0\cdot\mu\cdot N}$
$I=\frac{\tan11°\cdot1{,}7\cdot10^{-5}\,\text{T}\cdot0{,}50\,\text{m}}{1\cdot1{,}2566\cdot10^{-6}\,\text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{A}^{-1}\text{m}^{-1}\cdot30}$
$I=0{,}044\,\text{A}$
$I=44\,\text{mA}$</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">Durch die Spule fließt ein Strom von 44 mA.</td></tr>
</table>

390.

geg.:	$\ell = 3{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ $I = 1{,}0\,\mathrm{A}$ $\Delta m = 1{,}04 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$	ges.:	B
Lösungen:	Für die magnetische Flussdichte gilt allgemein: $B = \frac{F}{\ell \cdot I}$ Die Kraft kann über die Masseänderung bestimmt werden: $F = \Delta m \cdot g$ Damit erhält man die gesuchte Flussdichte $B = \frac{m \cdot g}{\ell \cdot I}$ $B = \frac{1{,}04 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{3{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot 1{,}0\,\mathrm{A}}$ $B = 0{,}34\,\mathrm{T}$ $B = 340\,\mathrm{mT}$		
Antwort:	Das Magnetfeld hat eine Flussdichte von 340 mT.		

389.

a) Für eine lange Spule ist die der Radius r deutlich kleiner als die Länge der Spule, also $r \ll \ell$

Mit dieser Aussage untersucht man nun die Gleichung.

$$B(z) = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{\ell}{2}\right)^2 + r^2}} - \frac{z - \frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{\ell}{2}\right)^2 + r^2}} \right)$$

Wie verhält sich die Flussdichte in der Mitte der Spule im Vergleich zum Rand? Für die Mitte der Spule ist z=0:

$$B(0) = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + r^2}} - \frac{-\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{\ell}{2}\right)^2 + r^2}} \right)$$

Wenn der Radius deutlich kleiner als die Länge ist, ist er so klein, dass er in der Summe der Quadrate praktisch keine Rolle spielt und weggelassen werden kann:

$$B(0) = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}} - \frac{-\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{\ell}{2}\right)^2}} \right)$$

Damit fällt aber auch die Wurzel samt Quadtrat weg:

$$B(0)=\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell}{2}}-\frac{-\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell}{2}}\right)$$

Achtung: im zweiten Ausdruck unter dem Bruchstrich wird durch das Quadrieren das Vorzeichen positiv.

$$B(0)=\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-(-1))$$

$$B(0)=\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2$$

$$B(0)=\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}$$

b) Wie sieht das nun für den rechten Rand aus? dort ist z genau die Hälfte der Länge:

$$B\left(\frac{\ell}{2}\right)=\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2}\right)^2+r^2}}-\frac{\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{2}\right)^2+r^2}}\right)$$

Den Radius kann man wieder weglassen.

$$B\left(\frac{\ell}{2}\right)=\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2}\right)^2}}-\frac{\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{2}\right)^2}}\right)$$

Wie zu sehen ist, verschwindet der zweite Term, da er im Zähler 0 wird.

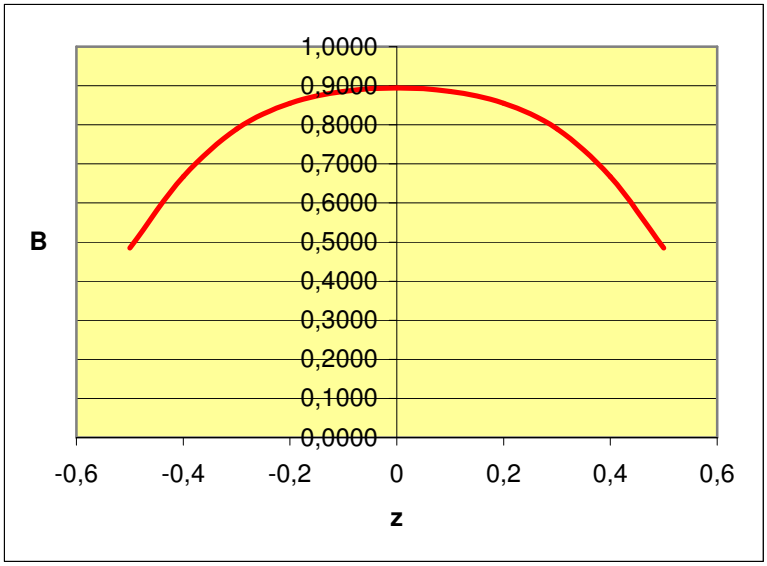
$$B\left(\frac{\ell}{2}\right)=\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2}\right)^2}}\right)$$

Der Ausdruck in der Klammer ergibt genau 1, so dass:

$$B\left(\frac{\ell}{2}\right)=\mu_0\cdot\frac{N\cdot I}{\ell}\cdot\frac{1}{2}$$

übrig bleibt.

c)



d) In der Excel-Tabelle erhält man über eine Zielwertsuche einen $\frac{d}{\ell}$-Wert von 0,14. (Extras, Zielwertsuche…)