

## Karussell und Loopingbahn

### 1038. (LK Sachsen 1998)

Bei einem Kettenkarussell hängen die Sitze an je 4,20 m langen Ketten, deren Aufhängung 4,75 m von der Drehachse entfernt ist. Diese Aufhängung ist unter Berücksichtigung der erforderlichen Sicherheit so ausgelegt, dass ein Sitz mit Fahrgast höchstens die Gesamtmasse von 200 kg haben und die Aufhängung der maximalen Zugkraft 2,8 kN ausgesetzt werden darf.

Im Ruhezustand des Karussells befindet sich der Sitz 60 cm über dem waagerechten Boden. Der Sitz mit Fahrgast ist als Punktmasse aufzufassen. Die Massen der Ketten werden vernachlässigt.

a) Berechnen Sie den Winkel, den bei Maximalbelastung die Aufhängungen mit der Vertikalen bildet.

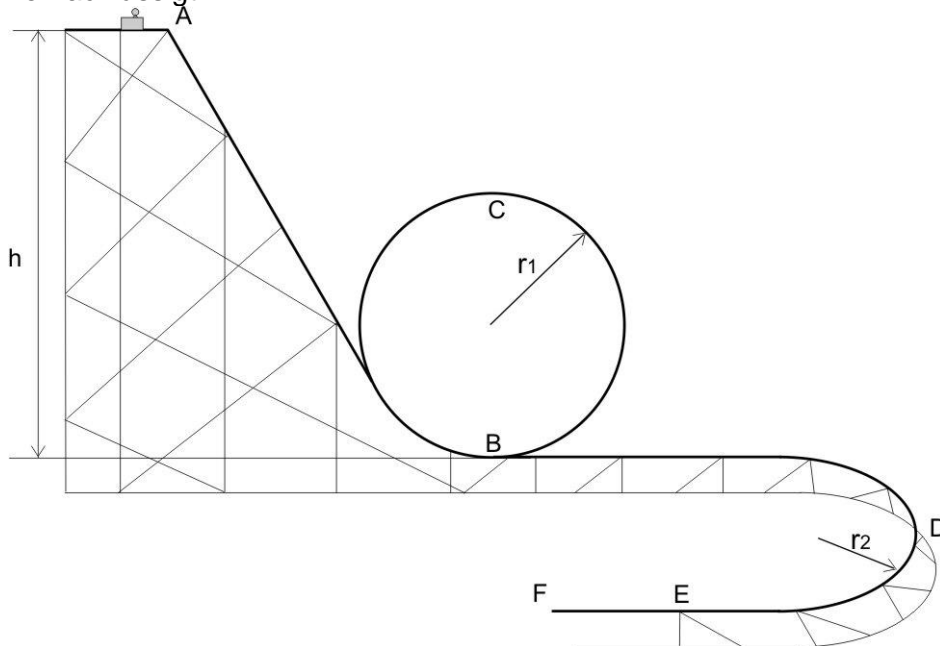
b) Berechnen Sie den Betrag der sich hierbei ergebenden Zentrifugalkraft.

c) Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit der Sitze bei Maximalbelastung.

d) Bei der Bahngeschwindigkeit  $8,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  löst sich vom Sitz die Mutter einer Schraube und schlägt am Boden auf.

Berechnen Sie die Mindestentfernung vom Fußpunkt des Karussells, in der sich Zuschauer aufhalten dürfen, ohne bei einem solchen Zwischenfall getroffen zu werden.

1004. Die Abbildung zeigt den schematischen Aufbau einer Achterbahn aus Looping und waagerechtem Halbkreis. Für die folgenden Aufgaben werden alle Reibungseinflüsse vernachlässigt.



a) Im Punkt C muss aus Sicherheitsgründen die Geschwindigkeit 50% über der nötigen Mindestgeschwindigkeit liegen. Zeigen Sie, dass dann die Gleichung

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot g \cdot r_1}$$

gilt.

b) Im Punkt A hat der Wagen eine Geschwindigkeit von  $1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , die sich auf  $24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  im Punkt

B steigert. Aus welcher Höhe ist der Wagen gestartet?

c) Welchen Radius hat der Looping?

**d)** Im Wagen sitzt eine Person mit einer Masse von 70 kg. Mit welcher Kraft wird sie während der Fahrt durch den Looping maximal in den Sitz gepresst?

**e)** Wie ändert sich diese Kraft, wenn der Looping einen größeren Radius besitzt und er im oberen Teil wieder mit 150% der Mindestgeschwindigkeit durchfahren werden soll?

**f)** Der nach dem Looping folgende Halbkreis mit 10 m Radius soll so durchfahren werden, dass keine seitlichen Kräfte auftreten. Dazu muss die Bahn nach innen geneigt werden. Wie groß muss der Neigungswinkel sein? (Hinweis: eine waagerechte Bahn hat einen Neigungswinkel von  $0^\circ$ )

**g)** Auf der Strecke von E nach F wird der Wagen gleichmäßig zum Stillstand abgebremst. Zwei Sekunden nach dem Beginn der Bremsung beträgt die Geschwindigkeit immerhin noch

$$16 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Zeichnen Sie für den gesamten Bremsvorgang das  $v(t)$ -Diagramm.

**h)** Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms den Bremsweg bis zum Stillstand.

**i)** Welche Bremskraft spürt der Fahrgast während des Abbremsens?

## Lösungen

1038.

a) Auf den Sitz wirken in voller Fahrt zwei Kräfte: die nach unten wirkende Gewichtskraft und die senkrecht nach außen ziehende Zentrifugalkraft. Daraus resultiert die Gesamtkraft, die über die Kette an der Aufhängung angreift.

Aus dem Kräfteparallelogramm kann man entnehmen, dass gilt:

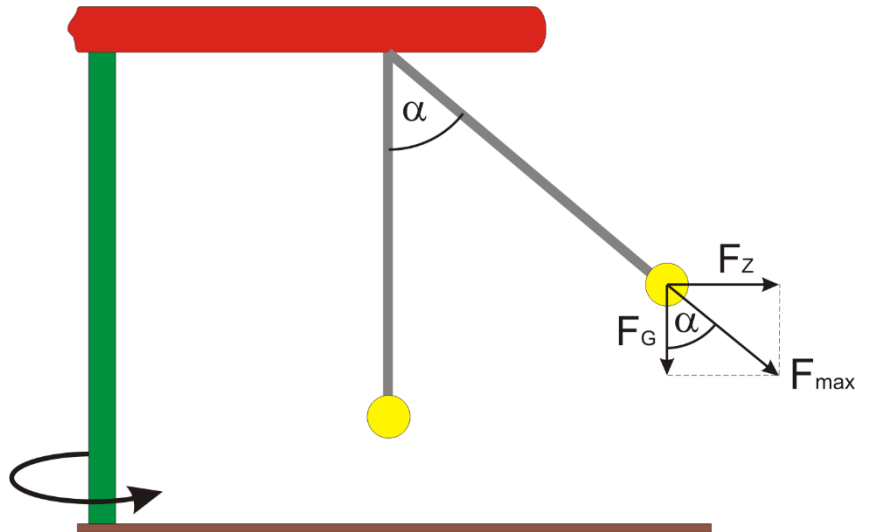
$$\cos \alpha = \frac{F_G}{F_{\max}}$$

Die Gewichtskraft erhält man aus der maximal zulässigen Masse von 200 kg.

$$\cos \alpha = \frac{m \cdot g}{F_{\max}}$$

$$\cos \alpha = \frac{200 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2,8 \cdot 10^3 \text{ N}}$$

$$\alpha = 46^\circ$$



b) Für die Zentrifugalkraft kann ebenfalls das Kräfteparallelogramm benutzt werden, nur das jetzt gilt:

$$\sin \alpha = \frac{F_Z}{F_{\max}}$$

Damit kann die Zentrifugalkraft berechnet werden:

$$F_Z = F_{\max} \cdot \sin \alpha$$

$$F_Z = 2,8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \sin 46^\circ$$

$$F_Z = 2000 \text{ N}$$

$$F_Z = 2,0 \text{ kN}$$

c) Die Zentrifugalkraft als Schein- oder Trägheitskraft berechnet sich ebenso wie die Radialkraft mit

$$F_z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{F_z \cdot r}{m}}$$

Aber was ist der Radius der Kreisbahn? Es kann nicht der Abstand der Aufhängung von der Drehachse sein, da ja durch die Schrägstellung des Sitzes etwas hinzukommt.

Dieser zusätzliche Abstand kann aber berechnet werden.

Der für die Berechnung der Bahngeschwindigkeit relevante Radius setzt sich aus den beiden Abständen  $a_1$  und  $a_2$  zusammen. Der unbekannte Abstand  $a_2$  ist in den blau gezeichneten Dreieck die Gegenkathete zum Auslenkwinkel Alpha. Die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck ist die eigentliche Länge der Kette, also 4,20 m lang. Es gilt also:

$$\sin \alpha = \frac{a_2}{l}$$

$$a_2 = \sin \alpha \cdot l$$

$$a_2 = \sin 46^\circ \cdot 4,20 \text{ m}$$

$$a_2 = 3,02 \text{ m}$$

Damit ist

$$r = a_1 + a_2$$

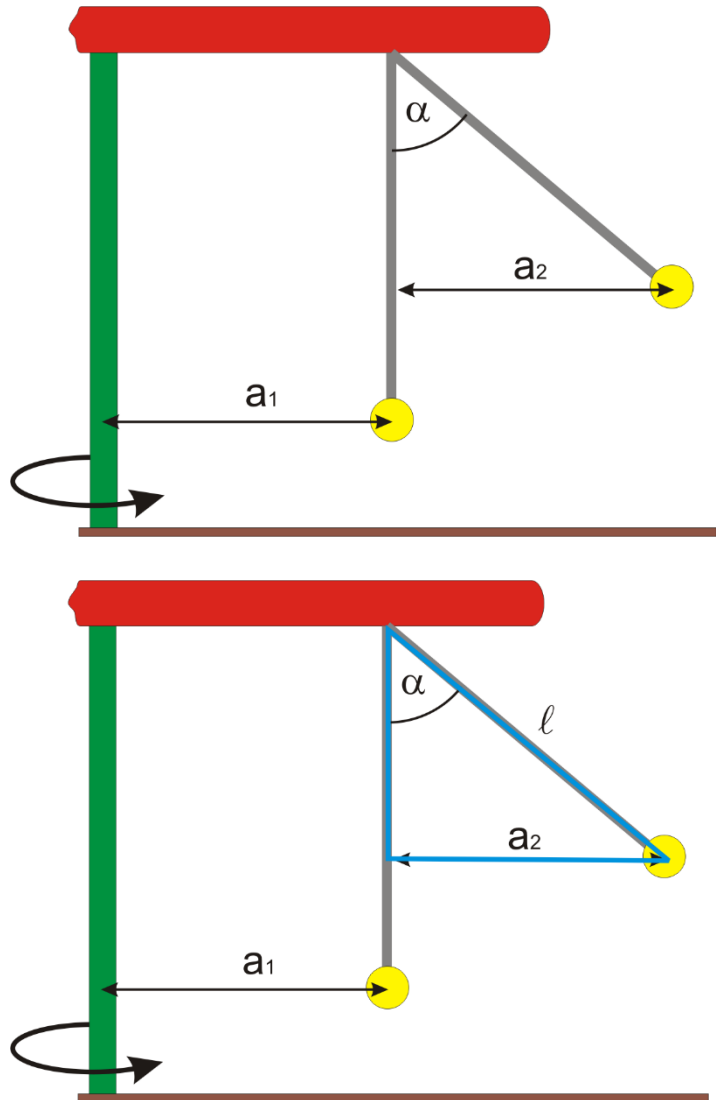
$$r = 4,75 \text{ m} + 3,02 \text{ m}$$

$$r = 7,77 \text{ m}$$

Und mit diesem Wert kann nun die gesuchte Bahngeschwindigkeit berechnet werden.

$$v = \sqrt{\frac{2,0 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 7,77 \text{ m}}{200 \text{ kg}}}$$

$$v = 8,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



d) Wenn sich die Mutter vom Sitz löst, wirkt auf sie keine Radialkraft mehr. Nach dem Newtonschen Trägheitsgesetz bewegt sie sich nun mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig weiter.

Da aber immer noch die Schwerkraft der Erde wirkt, wird die Bewegung der Mutter ein waagerechter Wurf.

Gesucht ist die Wurfweite  $x$ , die sich mit der Gleichung für die Wurfparabel beim Waagerechten Wurf berechnen lässt:

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot v_0^2 \cdot y}{g}}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist mit  $8,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  gegeben.  $y$  ist die Höhe über dem Erdboden, bei der sich die Mutter löst. Da der Sitz aber durch die Fliehkraft auch noch angehoben wird, sind das natürlich mehr als die  $0,6 \text{ m}$ .

Wie hoch wird der Sitz gehoben?

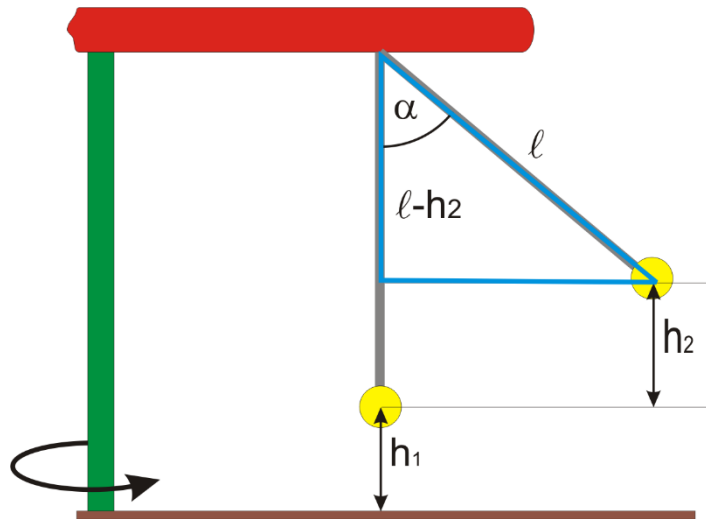
Die Gesamthöhe setzt sich aus den beiden Teilhöhen  $h_1$  und  $h_2$  zusammen.  $h_1$  ist bekannt und  $h_2$  lässt sich wieder berechnen. Im blauen Dreieck ist jetzt  $l - h_2$  die Ankathete zum Winkel und es gilt:

$$\cos \alpha = \frac{l - h_2}{l}$$

$$l - h_2 = \cos \alpha \cdot l$$

$$l - h_2 = \cos 46^\circ \cdot 4,2 \text{ m}$$

$$l - h_2 = 2,9 \text{ m}$$



Damit kann die gesuchte Höhe berechnet werden. Die  $2,9 \text{ m}$  werden von der Kettenlänge von  $4,2 \text{ m}$  abgezogen und man erhält  $1,3 \text{ m}$ . Die Gesamthöhe beträgt dann  $1,9 \text{ m}$ .

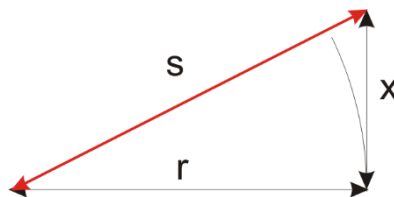
Nun kann die Wurfweite berechnet werden:

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(8,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 1,9 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

$$x = 5,5 \text{ m}$$

Okay, die Mutter fliegt  $5,5 \text{ m}$  und schlägt dann auf. Das ist aber NICHT der gesuchte Sicherheitsabstand, denn die Mutter fliegt ja tangential weg.

Von oben betrachtet sieht die Situation so aus: Die Mutter fliegt im Abstand  $r$  vom Drehzentrum weg und fliegt die Strecke  $x$ . Der gesuchte Sicherheitsabstand ist die Strecke  $s$ .



Zum Glück lässt sich der gesuchte Abstand wieder mit den Gesetzen für das rechtwinklige Dreieck bestimmen. Er ist die Hypotenuse und kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

$$s^2 = r^2 + x^2$$

$$s = \sqrt{r^2 + x^2}$$

$$s = \sqrt{(7,8\text{m})^2 + (5,5\text{m})^2}$$

$$s = 9,5\text{m}$$

Im Abstand von 9,5 m um das Drehzentrum das Karussells darf sich niemand aufhalten. Der Sicherheitsabstand sollte aber etwas größer gewählt werden, da man ja von einer Punktmasse ausgegangen ist. Berücksichtigt man die Größe von Sitz und Person mit, können Gegenstände auch etwas weiter fliegen.

#### 1004.

**a)** Als erstes muss gefragt werden, wie groß die Mindestgeschwindigkeit im Punkt C ist. Das ist die Geschwindigkeit, bei der der Wagen gerade noch so durch den oberen Punkt des Loopings kommt.

Im oberen Punkt wirkt wie überall die Gewichtskraft nach unten. Damit er dort nicht herunterfällt, muss eine Kraft in die entgegengesetzte Richtung wirken, die mindestens genau so groß ist. Diese Kraft wird durch die Fliehkraft aufgebracht, die hier als Trägheitskraft radial nach außen wirkt.

Es gilt also für den Minimalfall:

$$F_G = F_F$$

$$m \cdot g = \frac{m \cdot v^2}{r_1}$$

$$g = \frac{v^2}{r_1}$$

$$v = \sqrt{g \cdot r_1}$$

Wie man sieht, hängt die Geschwindigkeit nicht von der Masse ab. Deshalb darf auch jeder Achterbahn fahren!

Die geforderte Geschwindigkeit soll nun um 50% größer sein als die Minimalgeschwindigkeit:

$$v = 1,5 \cdot \sqrt{g \cdot r_1}$$

Das kann durch geschickte Umformungen in die gewünschte Form gebracht werden:

$$v_C = \frac{15}{10} \cdot \sqrt{g \cdot r_1}$$

$$v_C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{g \cdot r_1}$$

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt{g \cdot r_1}$$

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot g \cdot r_1}$$

**b)** Da die Reibung vernachlässigt wird, ist die Energieumwandlung so, dass aus der potenziellen und kinetischen Energie im Punkt A kinetische Energie im Punkt B gemacht wird:

$$E_{\text{kin,A}} + E_{\text{pot,A}} = E_{\text{kin,B}}$$

$$\frac{m}{2} \cdot v_A^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v_B^2$$

Wie man sieht, fliegt die Masse wie so oft raus.

$$\frac{1}{2} \cdot v_A^2 + g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v_B^2$$

Das h ist die gesuchte Größe, nach der die Gleichung umgestellt wird:

$$g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} \cdot v_A^2$$

$$h = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2 \cdot g}$$

$$h = \frac{\left(24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$h = 29,3 \text{ m}$$

c) Der gesuchte Radius kann auch über den Energieansatz bestimmt werden. Die kinetische Energie im Punkt B wird in potenzielle Energie im Punkt C umgewandelt. Da im Punkt C aber eine bestimmte Geschwindigkeit notwendig ist, besitzt der Wagen da auch noch kinetische Energie.

$$E_{\text{kin,B}} + E_{\text{pot,C}} = E_{\text{kin,C}}$$

$$\frac{m}{2} \cdot v_B^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{m}{2} \cdot v_C^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_B^2 = g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot v_C^2$$

Die Höhe h ist der doppelte Radius des Looping:

$$h = 2 \cdot r_1$$

Die Geschwindigkeit im Punkt C wurde bereits im Aufgabenteil a) berechnet:

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot g \cdot r_1}$$

Damit heißt die Gleichung nun:

$$\frac{1}{2} \cdot v_B^2 = g \cdot 2 \cdot r_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} g \cdot r_1$$

und muss nach dem gesuchten Radius umgestellt werden:

$$\frac{1}{2} \cdot v_B^2 = r_1 \cdot \left( g \cdot 2 + \frac{9}{8} g \right)$$

Der Ausdruck in der Klammer liefert

$$2g + \frac{9}{8}g$$

$$\frac{16}{8}g + \frac{9}{8}g$$

$$\frac{25}{8}g$$

Damit heißt die Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot v_B^2 = r_1 \cdot \frac{25}{8} g$$

$$v_B^2 = r_1 \cdot \frac{25}{4} g$$

$$r_1 = \frac{4 \cdot v_B^2}{25 \cdot g}$$

$$r_1 = \frac{4 \cdot \left(24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{25 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$r_1 = 9,4 \text{ m}$$

**d)** Man muss zuerst fragen, an welcher Stelle der Fahrer die größte Kraft spürt? Das ist eindeutig im Punkt B. Während der gesamten Fahrt spürt er natürlich seine Gewichtskraft. Im Looping kommt die Fliehkraft dazu. Sie wirkt im Punkt B genau in Richtung der Schwerkraft und addiert sich zu dieser. Gleichzeitig ist dort die Geschwindigkeit am größten, so dass auch die Fliehkraft einen Maximalwert erreicht.

Im Punkt B gilt:

$$F = F_G + F_F$$

$$F = m \cdot g + \frac{m \cdot v_B^2}{r}$$

$$F = 70 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{70 \text{ kg} \cdot \left(24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{9,4 \text{ m}}$$

$$F = 686,7 \text{ N} + 4290 \text{ N}$$

$$F = 4977 \text{ N}$$

Das sind rund 5 kN und das etwa 7,25 fache der Gewichtskraft der Person.

Das ist sehr viel und bedeutet eine hohe Belastung. Aus diesem Grund werden schon lange keine Kreisloopings mehr gebaut. Die Form eines Loopings ist heute ein Klothoid.

**e)** In die Gleichung für die Kraft wird die Geschwindigkeit im Punkt B durch eine entsprechende Gleichung ersetzt. Wie schon hergeleitet, gilt:

$$v_B^2 = r_1 \cdot \frac{25}{4} g$$

Das wird in die Kraftgleichung eingesetzt:

$$F = m \cdot g + \frac{m \cdot \frac{25}{4} \cdot g \cdot r}{r}$$

Wie zu sehen ist, kürzt sich der Radius einfach raus:

$$F = m \cdot g + \frac{25}{4} m \cdot g$$

Damit kann man allgemein schreiben:

$$F = \frac{4}{4} m \cdot g + \frac{25}{4} m \cdot g$$

$$F = \frac{29}{4} m \cdot g$$

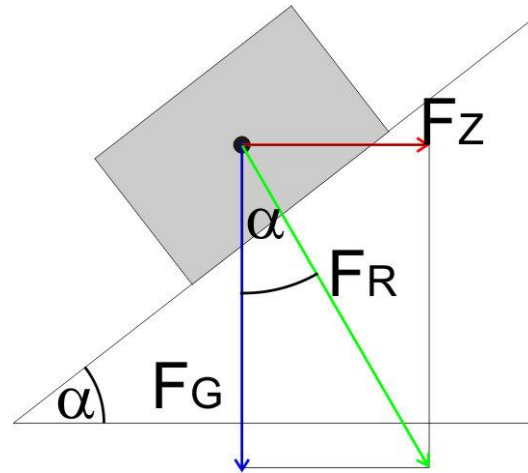


Das entspricht etwa dem 7,25 fachen der Gewichtskraft und das wurde vorhin schon berechnet.

f)

Auf den Wagen wirken in der Kurve zwei Kräfte: die nach unten zeigende Gewichtskraft  $F_G$  und die nach außen wirkenden Zentrifugalkraft  $F_Z$ . Letztere ist eine Trägheitskraft und genau so groß wie die Radialkraft.

Beide Kräfte erzeugen durch die vektorielle Addition eine resultierende Kraft  $F_R$ , die der Wagen dann spürt. Keine Seitenkräfte wirken, wenn die resultierende Kraft genau senkrecht auf den Untergrund drückt. Die muss also so geneigt sein, dass bei der gegebenen Geschwindigkeit diese Bedingung erfüllt ist.



Alpha ist der gesuchte Winkel. Er taucht zwischen der Gewichtskraft und der resultierenden Kraft nochmals auf, da die Schenkel der beiden Winkel senkrecht aufeinander stehen. Es sollte zu sehen sein, das gilt:

$$\tan \alpha = \frac{F_Z}{F_G}$$

Damit erhält man

$$\tan \alpha = \frac{m \cdot v^2}{r_2 \cdot m \cdot g}$$

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{r_2 \cdot g}$$

Der Radius ist bekannt. Aber wie groß ist die Geschwindigkeit. Kein Problem: es werden ja die Reibungskräfte vernachlässigt. Die würden alles noch viel komplizierter machen, sollten aber von Achterbahnkonstruktoren berücksichtigt werden!

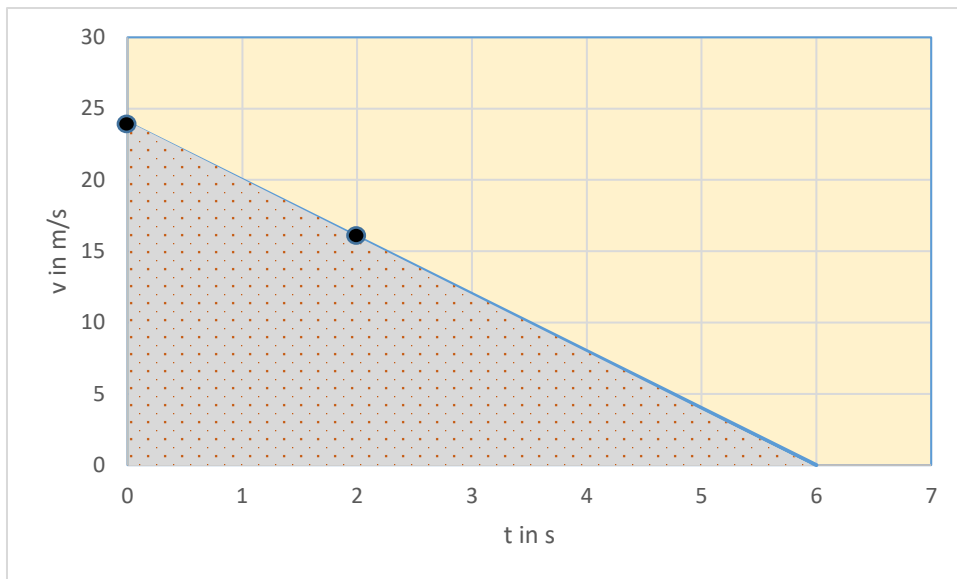
Die Geschwindigkeit ist so groß wie im Punkt B. Im Looping werden die Energieformen ja nur ineinander umgewandelt. Nach dem Energieerhaltungssatz ist aber die kinetische Energie vor und nach dem Looping gleich groß und damit auch die Geschwindigkeit. Nun denn:

$$\tan \alpha = \frac{\left(24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{10 \text{m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$\alpha = 80^\circ$$

Die Bahn muss um  $80^\circ$  gegen die Waagerechte geneigt sein.

g)



**h)** Die gesuchte Strecke entspricht der Fläche unter der Kurve, die hier eine dreieckige Form hat. Dieser Flächeninhalt muss berechnet werden:

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot 24 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6 \text{ s}$$

$$s = 72 \text{ m}$$

**i)** Die Kraft ist nach dem Grundgesetz

$$F = m \cdot a$$

Die Beschleunigung ist

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Damit kann die Kraft berechnet werden:

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F = 70 \text{ kg} \cdot \frac{24 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{6 \text{ s}}$$

$$F = 280 \text{ N}$$