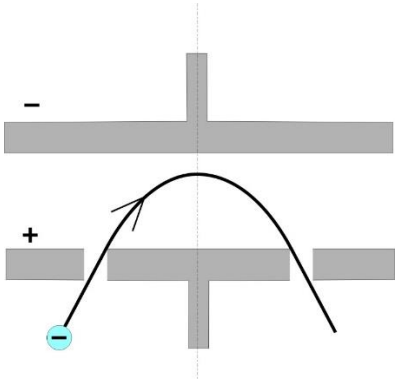
Ladungen im elektrischen Feld

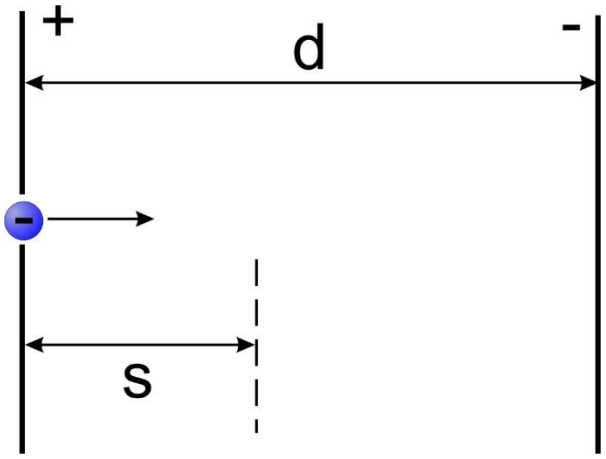
448. (PH LK) Elektronen dringen durch eine Öffnung in der positiven Platte in das homogene Feld eines Plattenkondensators ein und durchlaufen die in der Abbildung dargestellte Bahn. Der Eintrittswinkel beträgt 45°, die Spannung am Kondensator beträgt 1,0 kV und die Platten haben den Abstand 10,0 cm.
Hinweis: Abbildung nicht maßstäblich.



a) Falls $F_G < 0{,}01 \cdot F_{elektrisch}$ ist, wird die Gewichtskraft eines Elektrons bei den weiteren Untersuchungen vernachlässigt.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass diese Bedingung erfüllt ist.
b) Die Elektronen durchlaufen im Kondensator eine parabelförmige Bahn. Eintritts- und Austrittsgeschwindigkeit haben denselben Betrag.
Begründen Sie die beiden Aussagen ohne zu rechnen.

c) Die Geschwindigkeit der Elektronen beträgt unmittelbar vor dem Eintritt in das Feld $9{,}5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$.
Ermitteln Sie den maximalen Abstand der Elektronen von der positiven Platte und berechnen Sie die minimale kinetische Energie eines Elektrons.

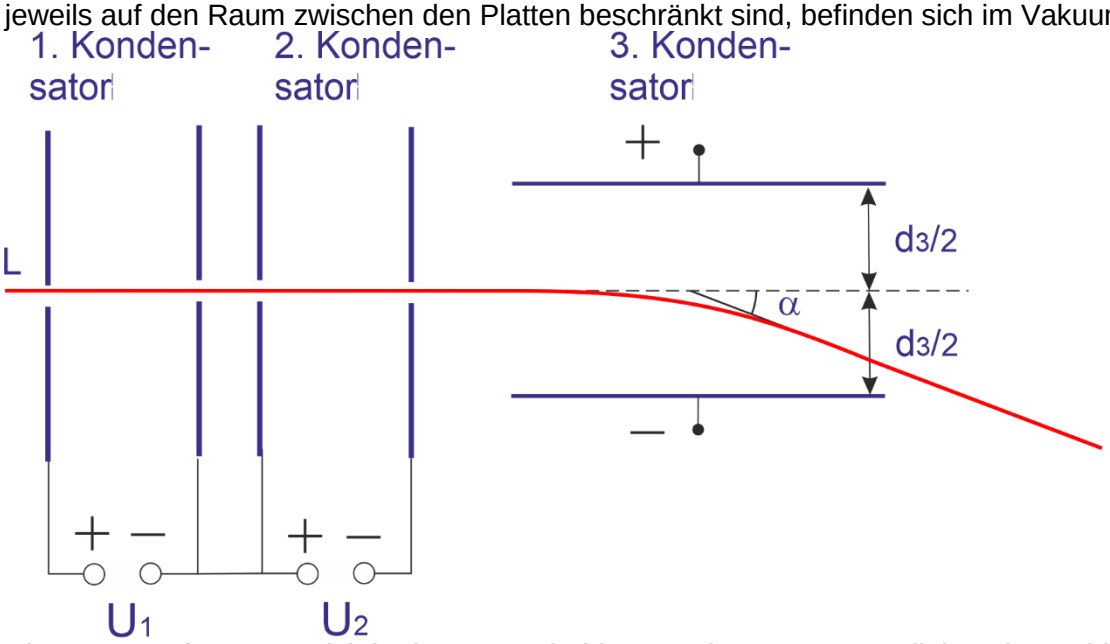
451. (LK 2015)
Ein Elektron tritt parallel zu den Feldlinien in ein homogenes elektrisches Feld eines Plattenkondensators ein, der Plattenabstand d beträgt 10,0 cm, die anliegende Spannung 5,00 V.
Die maximale Entfernung des Elektrons von der positiven Platte beträgt s = 2,30cm.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die das Elektron im Moment des Eintritts in das Feld hat.



545. Protonen im elektrischen Feld

(LK Bayern 2001)

Protonen treten mit vernachlässigbarer Anfangsgeschwindigkeit durch eine Lochblende L in eine Anordnung aus drei Plattenkondensatoren ein. Die Kondensatoren, deren homogenes jeweils auf den Raum zwischen den Platten beschränkt sind, befinden sich im Vakuum.



Die Protonen bewegen sich in den ersten beiden Kondensatoren parallel zu den Feldlinien. Der Plattenabstand dieser Kondensatoren beträgt jeweils $d_1 = d_2 = 2{,}5$ cm. Die Feldstärke im ersten Kondensator ist $E_1 = 4{,}0 \cdot 10^4$ V/m, die im zweiten $E_2 = 6{,}0 \cdot 10^4$ V/m. Alle Rechnungen sind nicht-relativistisch durchzuführen.

a) Zeigen Sie durch Berechnungen, dass die Geschwindigkeit v_2 eines Protons beim Verlassen des zweiten Kondensators $v_2 = 6{,}9 \cdot 10^5$ m/s beträgt.

b) Welche Zeit t_2 braucht ein Proton zum Durchfliegen des 2. Kondensators?

Die Protonen treten nun mit der Geschwindigkeit v_2 parallel zu den Platten in das Feld des dritten Kondensators ein, den sie mit einer Ablenkung um den Winkel α aus der ursprünglichen Flugrichtung wieder verlassen.

Der Plattenabstand dieses Kondensators ist $d_3 = 6{,}0$ cm und die Plattenlänge $\ell_3 = 10\,\text{cm}$.

Zwischen den Platten liegt die Spannung U_3 an, wobei die Kondensatormitte auf Erdpotential liegt.

c) Zeigen Sie, dass zwischen dem Winkel α und der Spannung U_3 folgender Zusammenhang besteht:

$$\tan\alpha = \frac{e \cdot \ell_3}{v_2^2 \cdot m_p \cdot d_3} \cdot U_3$$

d) Die Spannung U_3 wird nun so eingestellt, dass die Protonen den Kondensator unter einem möglichst großen Ablenkwinkel α_{max} verlassen.

Berechnen Sie U_3 und α_{max}.

Lösungen
448.
a) Beim Eintritt in den Kondensator spürt das Elektron zwei Kräfte: die nach unten wirkende Gewichtskraft und die ebenfalls nach unten wirkenden elektrische Kraft.
Die Gewichtskraft ist die Masse des Elektrons mal die Fallbeschleunigung:

$$F_G = m_e \cdot g$$

Die elektrische Kraft ergibt sich aus der Ladung des Elektrons e und der Feldstärke des homogenen Feldes im Kondensator E:

$$F_{el} = E \cdot e$$

Die Feldstärke im Kondensator erhält man aus der Spannung zwischen den Platten und dem Abstand der Platten:

$$E = \frac{U}{d}$$

Damit ist die elektrische Kraft

$$F_{el} = \frac{U \cdot e}{d}$$

In welchem Verhältnis stehen nun die Kräfte, wie groß ist also das Verhältnis

$$\frac{F_G}{F_{el}} ?$$

$$\frac{F_G}{F_{el}} = \frac{m_e \cdot g \cdot d}{U \cdot e}$$

$$\frac{F_G}{F_{el}} = \frac{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}100\,\text{m}}{1 \cdot 10^{3}\,\text{V} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}}$$

$$\frac{F_G}{F_{el}} = 5{,}58 \cdot 10^{-15}$$

Die Gewichtskraft ist um ein Vielfaches kleiner als die elektrische Kraft und kann vernachlässigt werden.

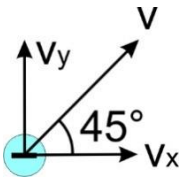
b) Die Bewegung des Elektrons im Kondensator kann als ein schiefer Wurf betrachtet werden: Waagerecht zu den Platten bewegt sich das Elektron gleichförmig, da in diese Richtung keine Kraft wirkt und nach unten bewegt es sich gleichmäßig beschleunigt, da es in diese Richtung die konstante Kraft des elektrischen Feldes spürt.

Damit ist die Bewegung in x-Richtung proportional zur Zeit und die Bewegung in y-Richtung proportional zum Quadrat der Zeit, also eine Parabel.

Da sich Ein- und Austrittsöffnung in der gleichen Ebene befinden, nämlich in der gleichen, ebenen Kondensatorplatte, wirkt bis zum größten Abstand von der +-Platte eine abbremsende konstante Kraft und von da ab eine beschleunigende konstante Kraft. Da im Kondensator ein homogenes elektrisches Feld ist, sind beide Kräfte im Betrag und in der Richtung gleich groß.
Die Geschwindigkeit bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung (konstante Kraft) ist die Beschleunigung (konstant) mal die wirkende Zeit.
Die Beschleunigung ist Masse mal Kraft und während der Flugphase im Kondensator konstant.
Da die Bewegung in x-Richtung eine gleichmäßige ist, sind die beiden Zeiten bis zum größten Abstand und nach dem größten Abstand gleich groß.

Das heißt, eine Zeit wirkt eine konstante abbremsende Kraft und die gleiche Zeit wirkt dann eine konstante beschleunigende Kraft.
Das bedeutet aber, dass die Geschwindigkeiten beim Ein- und Austritt vom Betrag her gleich sein müssen.

c) Die in der Aufgaben gegebene Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit es Elektrons in Bewegungsrichtung.
Diese Gesamtgeschwindigkeit kann in eine Komponente in x-Richtung und eine Komponente in y-Richtung zerlegt werden.
Die Komponente in x-Richtung ändert sich nicht, da in diese Richtung keine Kraft wirkt.
Die Komponente in y-Richtung wird durch die Kraft des homogenen elektrischen Feldes immer kleiner und wird im Umkehrpunkt Null.
Die Frage ist, wie weit ist es dann von der Einflugöffnung in y-Richtung entfernt.
Als erstes wird er Wert der Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung berechnet.



Die Geschwindigkeit v ist die Diagonale des Quadrates, das von den beiden Geschwindigkeitsvektoren gebildet wird. Damit gilt:

$$v_x = v_y = \sqrt{\frac{v^2}{2}}$$

$$v_x = v_y = 6{,}7 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

Auf das Elektron wirkt die Kraft des elektrischen Feldes.

$$F_{el} = \frac{U \cdot e}{d}$$

Diese Kraft bewirkt eine Beschleunigung:

$$m_e \cdot a = \frac{U \cdot e}{d}$$

$$a = \frac{U \cdot e}{d \cdot m_e}$$

Damit kann die Zeit bestimmt werden, in der das Elektron in y-Richtung zum Stillstand kommt:

$$a = \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

Da es eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist, gilt für den Weg

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

und mit der eingesetzten Zeit

$$s = \frac{v^2}{2 \cdot a}$$

$$s = \frac{v^2 \cdot d \cdot m_e}{2 \cdot U \cdot e}$$

Damit kann der Abstand des Elektrons von der positiven Platte im Umkehrpunkt berechnet werden:

$$s = \frac{\left(6{,}7 \cdot 10^{6}\,\frac{m}{s}\right)^2 \cdot 10{,}0 \cdot 10^{-2}\,m \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg}{2 \cdot 1 \cdot 10^{3}\,V \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C}$$

$$s = 1{,}28 \cdot 10^{-2}\,m$$

$$s = 1{,}28\,cm$$

Kommt das Elektron durch das Loch in den Kondensator hinein, ist seine kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

$$E_{kin} = 1{,}64 \cdot 10^{-16}\,J$$

$$E_{kin} = 1026\,eV$$

Seine minimale kinetische Energie hat das Elektron im Umkehrpunkt. Die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung ist Null, so dass nur noch die Komponente in x-Richtung eine Rolle spielt.
Im Umkehrpunkt ist die kinetische Energie auf

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

$$E_{kin} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg}{2} \cdot \left(6{,}7 \cdot 10^{6}\,\frac{m}{s}\right)^2$$

$$E_{kin} = 2{,}0 \cdot 10^{-17}\,J$$

$$E_{kin} = 128\,eV$$

gesunken.

451.
Das Elektron tritt in das elektrische Feld ein und wird entsprechend der Richtung des Feldes abgebremst. Das Elektron muss im elektrischen Feld Arbeit verrichten und verliert dadurch seine kinetische Energie, wird also langsamer.
In der maximalen Entfernung bleibt es stehen und hat keine kinetische Energie mehr.
Wenn es nun nicht bei 2,3 cm stehen bleiben müsste, sondern es genau bis zur anderen Platte geschafft hätte, wäre seine Energie beim Eintritt genau 5,0 eV.
Wenn es das Elektron bis zur Mitte des Plattenkondensators geschafft hätte, wäre seine Energie nur 2,5 eV groß gewesen.
Nun ist es nur 2,3 cm von der Eintrittsplatte weggekommen. Über eine Verhältnisgleichung lässt sich die Energie des Elektrons berechnen:

$$\frac{2{,}3\,cm}{10\,cm} = \frac{x\,eV}{5{,}0\,eV}$$

$$x\,eV = \frac{2{,}3\,cm}{10\,cm} \cdot 5{,}0\,eV$$

$$x = 1{,}15\,eV$$

Damit hatte das Elektron beim Eintritt eine kinetische Energie von 1,15 eV.
Wenn man das in J umrechnet, erhält man die verschwindend kleine Energie von $1{,}84 \cdot 10^{-19}$ J.

Die Geschwindigkeit erhält man über die Gleichung der kinetischen Energie:

$$E = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}84 \cdot 10^{-19}\,J}{9{,}1095 \cdot 10^{-31}\,kg}}$$

$$v = 636 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

$$v = 636 \frac{km}{s}$$

$$v = 0{,}2\,\% \text{ der Lichtgeschwindigkeit}$$

545.

a) Die Protonen werden in den beiden Kondensatoren durch die Kraft der elektrischen Felder beschleunigt. Dadurch erhalten sie im Kondensator aus der Energie des elektrischen Feldes Bewegungsenergie, an ihnen wird Beschleunigungsarbeit verrichtet.
Im ersten Kondensator erfolgt das aus der Ruhe heraus. Die Protonen besitzen am Anfang demnach keine kinetische Energie und am Ende so viel, wie im elektrischen Feld enthalten sind.
Die Energie, die ein Elementarteilchen aus einem elektrischen Feld erhält, wird in eV (Elektronenvolt) angegeben. Die Energie, die ein Teilchen mit einer Elementarladung erhält, wenn es ein Feld durchfliegt, das von einer Spannung von 1 V erzeugt wird, ist genau 1eV groß.
Zum Glück besitzt das Proton genau eine Elementarladung, so dass man nur noch die Spannungen in den Kondensatoren kennen muss.

Für ein homogenes Feld gilt:

$$E = \frac{U}{d}$$

$$U = E \cdot d$$

Damit können für beide Kondensatoren die anliegenden Spannungen berechnet werden:
1. Kondensator

$$U = 4{,}0 \cdot 10^4 \frac{V}{m} \cdot 0{,}025\,m$$

$$U = 1000\,V$$

2. Kondensator

$$U = 6{,}0 \cdot 10^4 \frac{V}{m} \cdot 0{,}025\,m$$

$$U = 1500\,V$$

Das heißt, aber, wenn das Proton die zwei Kondensatoren durchflogen hat, hat es eine Gesamtspannung von 2500 V durchflogen. Die Energie, die das Proton beim ersten Kondensator erhalten hat, wird einfach zu der Energie aus dem zweiten Kondensator addiert.

Die Gesamtenergie nach dem Durchfliegen der beiden Kondensatoren ist 2500 eV.

Nun ist aber die Geschwindigkeit gesucht und nicht die Energie. Energie und Geschwindigkeit sind über die Gleichung

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

verknüpft.
Damit ist die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin}}{m}}$$

Die Masse ist die Protonenmasse. Die Energie muss nun aber aus der Einheit eV in Joule umgewandelt werden.
Dazu wird die eV-Zahl mit der Elementarladung multipliziert.
Damit lässt sich die Geschwindigkeit berechnen

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2500\,eV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg}}$$

$$v = 6{,}9 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$$

Und genau das sollte ja gezeigt werden.

b)
Die Bewegung durch jeden der beiden Kondensatoren ist jeweils eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. In einem homogenen elektrischen Feld ist die Kraft auf einen geladenen Körper an allen Stellen gleich groß.
Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gibt es die Größe Beschleunigung, die besagt, wie groß die Geschwindigkeitsänderung in einer bestimmten Zeit ist. Diese Zeit ist unsere gesuchte Größe.
Um diese Zeit zu bestimmen, brauchen wir noch die Geschwindigkeit, mit der das Proton in den zweiten Kondensator einfliegt. Die Endgeschwindigkeit ist ja aus der ersten Aufgabe bekannt, so dass die Geschwindigkeitsänderung bestimmt werden kann.

Die Startgeschwindigkeit berechnet sich wie in der ersten Aufgabe, nur dass nun eine Energie von 1000 eV benutzt wird:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000\,eV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg}}$$

$$v = 4{,}4 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$$

Damit ändert sich die Geschwindigkeit des Protons im zweiten Kondensator um

$$\Delta v = v_E - v_A$$

$$\Delta v = 6{,}9 \cdot 10^5 \frac{m}{s} - 4{,}4 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$$

$$\Delta v = 2{,}5 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$$

Jetzt brauch man noch die Beschleunigung. Die erhält man über das Newtonsche Grundgesetz:

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m}$$

Die Kraft im elektrischen Feld ist durch die Feldstärke bestimmt:

$$E = \frac{F}{q}$$

$$F = E \cdot q$$

Die Kraft kann in das Grundgesetz eingesetzt werden:

$$a = \frac{E \cdot q}{m}$$

Damit lässt sich nun die gesuchte Zeit berechnen:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\frac{E \cdot q}{m} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta v \cdot m}{E \cdot q}$$

In der Gleichung sind alle Größen bekannt. m ist die Protonenmasse und q ist die Elementarladung.

$$\Delta t = \frac{2{,}5 \cdot 10^{5} \frac{m}{s} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg}{6{,}0 \cdot 10^{4} \frac{V}{m} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C}$$

$$\Delta t = 4{,}4 \cdot 10^{-8}\,s$$

Fertig.

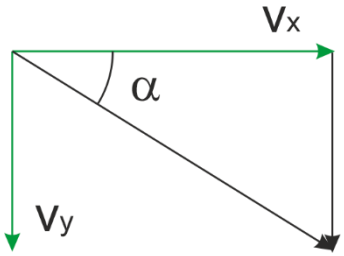
c)

Die Bahn des Protons durch den dritten Kondensator entspricht der Bahn eines waagerecht geworfenen Körpers. In waagerechter Richtung bewegt sich das Proton mit konstanter Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit entspricht der Geschwindigkeit, die in der ersten Aufgabe berechnet wurde. Da keine Kraft in diese Richtung wirkt, bleibt sie unverändert.

Die Bewegung nach unten ist durch die konstant wirkende Kraft gleichmäßig beschleunigt. Das heißt, die Geschwindigkeit wird gleichmäßig größer.

Den gesuchten Winkel erhält man über die beiden Geschwindigkeitskomponenten:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$



Die Geschwindigkeit in x-Richtung ist bekannt und entspricht v_2.

Die y-Geschwindigkeit muss bestimmt werden. Da sie Bewegung gleichmäßig beschleunigt ist, gilt:

$$a = \frac{v_y}{t}$$

$$v_y = a \cdot t$$

Die Geschwindigkeitsänderung entspricht der gesuchten Geschwindigkeit in y-Richtung, da zu Beginn der Beschleunigung ja noch keine Geschwindigkeit vorhanden war.

Die Zeit ist die Zeit, die sich das Proton in dem Kondensator aufhält. Sie lässt sich über die Bewegung in x-Richtung bestimmen. Man kennt die Geschwindigkeit in x-Richtung und die Flugstrecke. Sie entspricht der Länge des Kondensators. Da die Bewegung gleichförmig ist, gilt:

$$v_2 = \frac{\ell_3}{t}$$

$$t = \frac{\ell_3}{v_2}$$

Die Zeit kann in die Geschwindigkeitsgleichung erst mal eingesetzt werden.

$$v_y = a \cdot \frac{\ell_3}{v_2}$$

Über die Beschleunigung des Protons im homogenen Feld wurde in der Lösung b) bereits eine Aussage gemacht:

$$a = \frac{E \cdot q}{m}$$

Die elektrische Feldstärke im homogenen Feld ist

$$E = \frac{U}{d}$$

U ist die an den Platten anliegende Spannung und d der Abstand der Platten. Beides ist bekannt.
Damit erhält man für die Beschleunigung

$$a = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p}$$

Die Ladung des Protons entspricht der Elementarladung e.
Die Gleichung für die Beschleunigung wird in die Gleichung für die Geschwindigkeit v_y eingesetzt:

$$v_y = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3}{v_2}$$

Und damit geht man nun endlich in die Gleichung für den Tangens des Winkels:

$$\tan\alpha = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3}{v_2} \cdot \frac{1}{v_2}$$

Damit ist man fast fertig. Die Geschwindigkeiten untern Bruchstrich werden zusammengefasst und man erhält

$$\tan\alpha = \frac{e \cdot \ell_3}{v_2^2 \, d_3 \cdot m_p} \cdot U_3$$

Fertig.

d)
Ein möglichst großer Ablenkwinkel bedeutet, dass das Proton gerade so an der rechten, unteren Kante des Plattenkondensators vorbeikommt.
Das heißt, es wird bei seinem Flug durch den Kondensator um genau den halben Plattenabstand nach unten abgelenkt.

$$y_{max} = \frac{d_3}{2}$$

Da die Bewegung gleichmäßig beschleunigt ist, gilt nach den Gesetzten der Kinematik aber auch

$$y_{max} = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Die Zeit ist schon in der vorherigen Lösung bestimmt worden, die ist unverändert.

$$y_{max} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\ell_3^2}{v_2^2}$$

Die Beschleunigung wurde auch schon bestimmt:

$$y_{max} = \frac{U_3 \cdot e}{2 \cdot d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3^2}{v_2^2}$$

Die beiden Gleichungen werden nun gleichgesetzt und nach der gesuchten Spannung umgestellt.

$$\frac{d_3}{2} = \frac{U_3 \cdot e}{2 \cdot d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3^2}{v_2^2}$$

$$d_3 = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3^2}{v_2^2}$$

$$U_3 = \frac{d_3^2 \cdot m_p \cdot v_2^2}{e \cdot \ell_3^2}$$

Da alles gegeben ist, kann die Spannung berechnet werden:

$$U_3 = \frac{\left(6{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(6{,}9 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot \left(0{,}10\,\mathrm{m}\right)^2}$$

$$U_3 = 1800\,\mathrm{V}$$

Für den gesuchten Winkel geht man von

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

aus. Die Geschwindigkeit in x-Richtung ist die bekannte v_2.

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_2}$$

Die Geschwindigkeit in y-Richtung wurde schon oben bestimmt:

$$v_y = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3}{v_2}$$

Eingesetzt ergibt das

$$\tan\alpha = \frac{U_3 \cdot e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3}{v_2^2}$$

Nun könnte man rechnen, aber die Gleichung kann noch vereinfacht werden. Die Spannung am Ablenkkondensator ist ja auch bekannt und kann eingesetzt werden:

$$\tan\alpha_{max} = \frac{e}{d_3 \cdot m_p} \cdot \frac{\ell_3}{v_2^2} \cdot \frac{d_3^2 \cdot m_p \cdot v_2^2}{e \cdot \ell_3^2}$$

Und wie man sieht, kürzt sich da jetzt allerlei raus:

$$\tan\alpha_{max} = \frac{d_3}{\ell_3}$$

Damit ist der Winkel nun recht einfach zu bestimmen:

$$\tan \alpha_{max} = \frac{6{,}0\,\text{cm}}{10\,\text{cm}}$$

$$\alpha_{max} = 31°$$