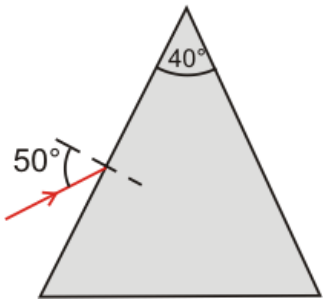
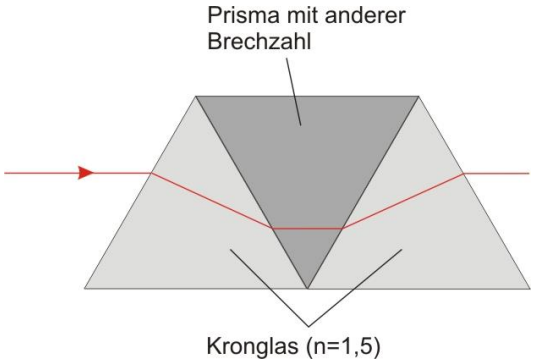
Aufgaben zum Brechungsgesetz

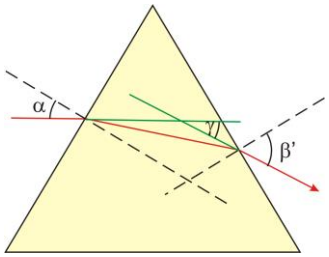
250. Ein einfarbiger Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel 50° auf ein Glasprisma, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck ist. Das Glasprisma hat für diese Lichtfarbe die Brechzahl 1,5.
Um welchen Winkel wird der Lichtstrahl durch das Prisma aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt?



294. Ein Lichtbündel durchläuft ein Geradsichtprisma, bei dem drei Prismen mit jeweils einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche „hintereinander geschaltet" sind.
Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Brechzahl des mittleren Prismas das Lichtbündel das Geradsichtprisma ohne Gesamtablenkung (wie in der Abbildung dargestellt) durchläuft. Stellen Sie Zwischenschritte Ihrer Berechnung dar.

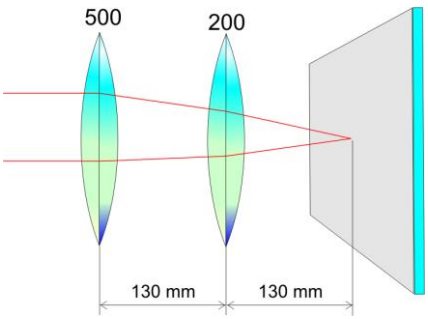


302. Ein roter Laserstrahl trifft unter dem Einfallswinkel von 30° auf ein gleichseitiges Prisma. Die Brechzahl für diese Farbe ist 1,51.
a) Stellen Sie eine Gleichung auf, die als Variable nur den Einfallswinkel α, den Ausfallswinkel β' und die Brechzahl n enthält.
b) Bestimmen Sie den Ausfallswinkel β'



e) Für welchen Winkel α_{min} wird für den roten Strahl der Winkel β' genau 90°?
c) Der rote Laserstrahl wird durch einen grünen Laserstrahl ersetzt, die Brechzahl für diese Farbe ist 1,52. Unter welchem Winkel β' tritt dieser Strahl aus?
d) Wie groß ist der Unterscheid des Ablenkwinkel γ für den roten und für den grünen Laserstrahl?
f) Stellen Sie für die rote Linie die Funktion $\gamma(\alpha)$ für $30° \leq \alpha \leq 90°$ mit dem grafischen Taschenrechner dar. Für welchen Einfallswinkel ist der Winkel der Ablenkung am kleinsten?

292. Ein Zoomobjektiv besteht aus einer Vielzahl von Linsen, bei denen das mittlere Paket (Variator) zur Brennweitenänderung verschoben werden kann.
Der einfachste Aufbau eines solchen Objektivs besteht aus zwei Sammellinsen, deren Abstand verändert werden kann.
Zwei dünne Linsen mit 500 mm und 200 mm Brennweite stehen in einem Abstand von 130 mm. Zwei parallel einfallende Lichtstrahlen treffen sich 130 mm hinter der zweiten Linse.
Wie groß ist die Gesamtbrennweite dieser Linsenkombination?



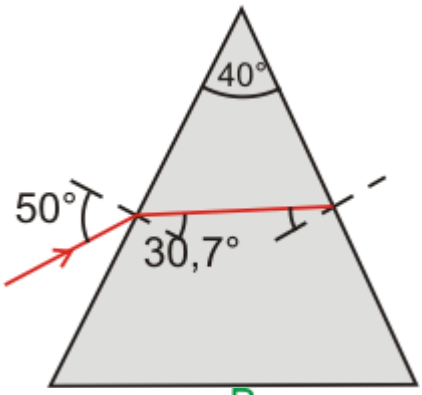
185. Welches ist bei einer Sammellinse der kleinste mögliche Abstand zwischen dem Gegenstand und dessen reellem Bild?

Lösungen
250.
1. Wie groß ist der Brechungswinkel des einfallenden Lichtstrahls am Übergang Luft-Glas?

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$$

$$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}$$

$$\beta=30{,}7°$$



Der Einfallswinkel auf der gegenüberliegenden Seite berechnet sich über die Innenwinkelsumme im Dreieck.
Es ist:

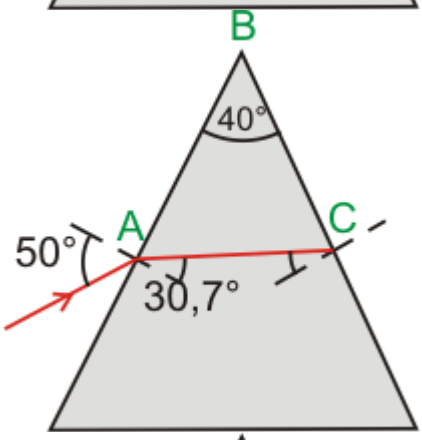
$$\Delta CAB=90°-30{,}7°$$

$$\Delta CAB=59{,}3°$$

Damit kann ΔBCA über die Innenwinkelsumme berechnet werden.

$$\Delta BCA=80{,}7°$$

Der neue Einfallswinkel ist dann 9,3° groß.

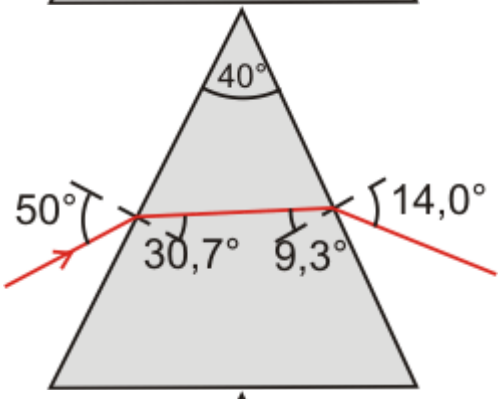


Die zweite Brechung findet am Übergang optisch dicht zu optisch dünn statt. es gilt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{n}$$

$$\sin\beta=\sin\alpha\cdot n$$

$$\beta=14°$$



Nun ist aber nicht der Winkel gefragt, unter dem der Lichtstrahl das Glas verlässt, sondern der Winkel, unter dem der Strahl aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wurde.
Wenn der Strahl in das Glas eintritt, wird er um

$$\gamma_1=\alpha_1-\beta_1$$

$$\gamma_1=50°-30{,}7°$$

$$\gamma_1=19{,}3°$$

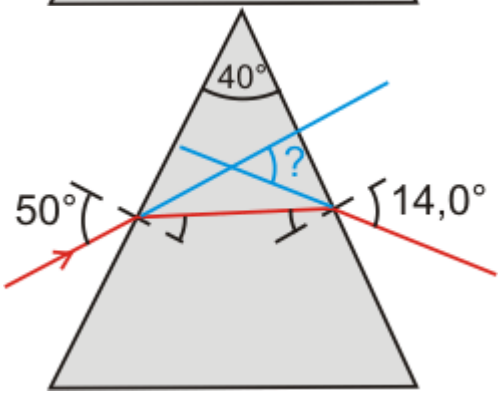
abgelenkt.
Beim Austritt sind es

$$\gamma_2=\beta_2-\alpha_2$$

$$\gamma_1=14°-9{,}3°$$

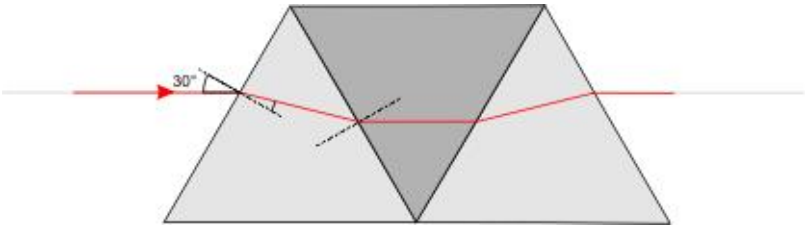
$$\gamma_1=4{,}7°$$

Das ergibt zusammen eine Ablenkung um 24°.



294.

Als erstes wird der Weg des Lichtes durch das linke Prisma berechnet. Der Einfallswinkel ist 30° groß.

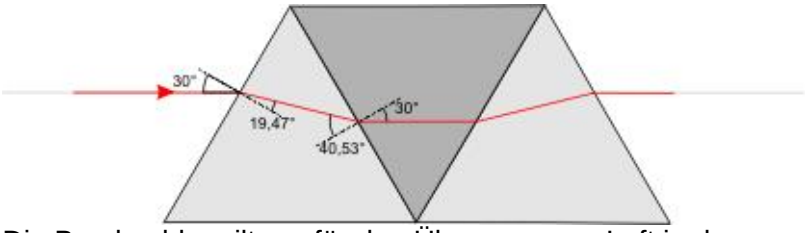


$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$$

$$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}$$

$$\beta=19,47°$$

Da in einem gleichseitigen Dreieck alle drei Innenwinkel 60° groß sind, kann der Einfallswinkel auf der gegenüberliegenden Seite des Prismas zu 40,53° berechnet werden.



Das Licht geht nun von einem Stoff mit der Brechzahl 1,5 in einen anderen Stoff mit einer noch größeren Brechzahl über. Das sieht man daran, dass der Lichtstrahl wieder zum Lot hin gebrochen wird.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}$$

$$n_2=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot n_1$$

$$n_2=1,95$$

Die Brechzahl n gilt nur für den Übergang von Luft in den betreffenden Stoff. Es ist also

$$n=\frac{c}{c_{Stoff}}$$

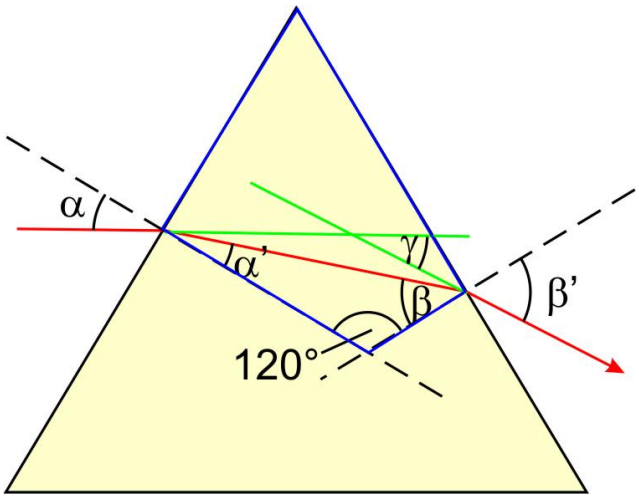
Geht Licht von einem Stoff 1 in einen anderen Stoff 2 über und die Brechzahlen der beiden Stoffe sind bekannt, so gilt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}$$

Der weitere Weg des Lichtstrahls entspricht dem auf der linken Seite. Bei den nächsten beiden Übergängen geht er jeweils von einem Stoff mit hoher Brechzahl in einen Stoff mit niedriger Brechzahl über und wird vom Lot weggebrochen.

302.

a) Die Zeichnung wird um weitere Winkel ergänzt.



Der 120°-Winkel ergibt sich aus der Winkelsumme des blauen Vierecks: zwei Winkel sind 90° groß, ein Winkel 60°: es bleiben noch 120° bis zu den geforderten 360°.

Laut Brechungsgesetz gelten die Beziehungen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}=n$$

und

$$\frac{\sin\beta}{\sin\beta'}=\frac{1}{n}$$

Weiterhin erkennt man im Innern des Prismas die Beziehung:

$$180°=120°+\alpha'+\beta$$

Stellt man die beiden Gleichungen nach den Winkeln im Prisma um, kann man das dann in die Winkelsummengleichung einsetzen:

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{n}$$

$$\alpha' = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\beta'}{n}\right)$$

und eingesetzt:

$$180° = 120° + \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) + \arcsin\left(\frac{\sin\beta'}{n}\right)$$

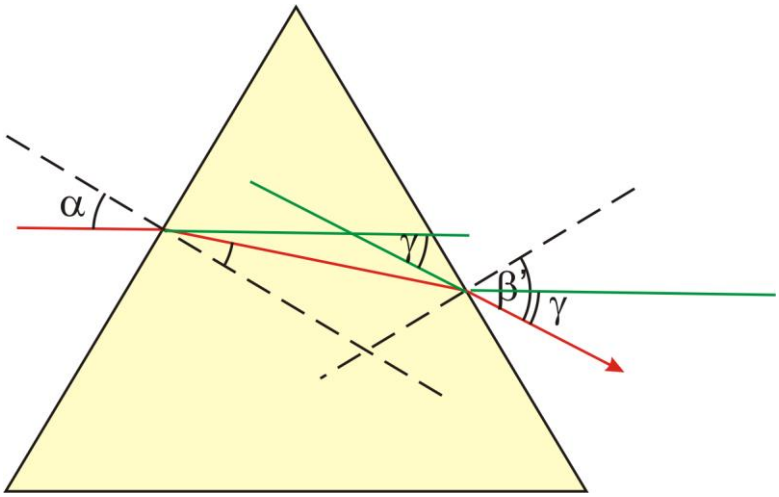
$$60° = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) + \arcsin\left(\frac{\sin\beta'}{n}\right)$$

Das ist die geforderte Gleichung.

b) Diese Gleichung wird z.B. in den Solver des Grafiktaschenrechners eingegeben und nach der gesuchten Größe gesucht. Setzt man für den Einfallswinkel 30° und die Brechzahl 1,51 ein, erhält man als Ausfallwinkel 79,7°.

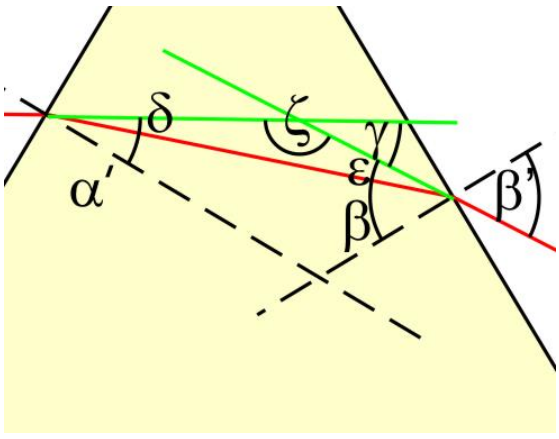
c) Die Änderung der Brechzahl liefert für den grünen Strahl einen Ausfallswinkel von 83,3°.

d)
Wenn man die Verlängerung des einfallenden Strahls (grüne Linie) nach unten verschiebt, sieht man, dass der gesuchte Winkel immer der Ausfallswinkel – 30° ist. Damit werden der rote Strahl um 49,7° und der grüne Strahl um 53,3° abgelenkt.



e) Wieder mit dem Solver: Bei einem Einfallswinkel von 28,7° ist der Ausfallswinkel genau 90° groß.

f) Als erstes wird untersucht, wie der Winkel γ mit dem Einfallswinkel α und dem Ausfallswinkel β' zusammenhängt.
Dazu nähert man sich dem Zusammenhang über das Dreieck, was von den grünen und der roten Linie aufgespannt wird. Es gilt der Innenwinkelsatz:
$\delta + \varepsilon + \zeta = 180°$
Weiterhin sieht man:
$180° = \zeta + \gamma$
Setzt man die beiden Gleichungen gleich, erhält man



$$\delta + \varepsilon + \zeta = \zeta + \gamma$$

$$\delta + \varepsilon = \gamma$$

Da fehlen nun aber der Einfalls- und der Ausfallswinkel, um die es ja eigentlich geht. Aber auch da sind Zusammenhänge zu erkennen:

$\alpha = \alpha' + \delta$

und

$\beta' = \beta + \varepsilon$

Diese beiden Gleichungen kann man umstellen und in die obere einsetzen, so dass die Gleichung dann so aussieht:

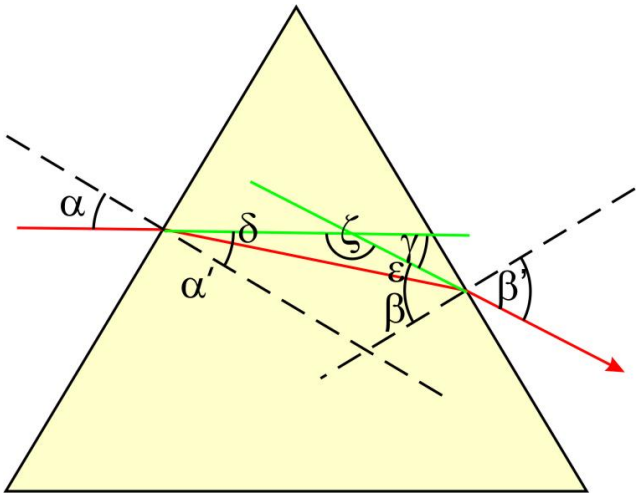
$\gamma = \alpha - \alpha' + \beta' - \beta$

Nun weiß man aber aus der Lösung a), dass die beiden Einfallslote in einem Winkel von 120° zueinander stehen. Damit ergibt sich

$180° = 120° + \alpha' + \beta$

oder vereinfacht:

$\beta = 60° - \alpha'$



Setzt man das nun ein, bekommt man den gewünschten Zusammenhang:

$\gamma = \alpha - \alpha' + \beta' - \beta$

$\gamma = \alpha - \alpha' + \beta' - (60° - \alpha')$

$\gamma = \alpha - \alpha' + \beta' - 60° + \alpha'$

Die Vorzeichenregel ist in der Schule sicher oft geübt worden und die Lehrer haben darauf hingewiesen, dass man das später mal braucht. Das später ist jetzt!

Zum Schluss bleibt noch

$\gamma = \alpha + \beta' - 60°$

übrig.

Aber: das ist noch nicht das Ende! Jetzt muss der Ausfallswinkel noch so behandelt werden, dass er in Anhängigkeit vom Einfallswinkel erscheint. Das heißt, zum Schluss darf die Gleichung als Variable nur noch der Einfallswinkel, die Brechzahl und den gesuchten Ablenkwinkel enthalten.

Also weiter ☺

Die Brechung an der rechten Kante von optisch dicht zu optisch dünne wird mit der Gleichung

$$\frac{\sin\beta}{\sin\beta'} = \frac{1}{n}$$

beschrieben. Damit erhält man den Brechungswinkel:

$\beta' = \arcsin(\sin\beta \cdot n)$

Wie groß ist β?

Aus Lösung a) kommt

$180° = 120° + \alpha' + \beta$

Damit ist

$\beta = 60° - \alpha'$

und es wird

$\beta' = \arcsin(\sin(60° - \alpha') \cdot n)$

Der Brechungswinkel α' kann über den Einfallswinkel und die Brechzahl angegeben werden

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = n$$

$$\alpha' = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)$$

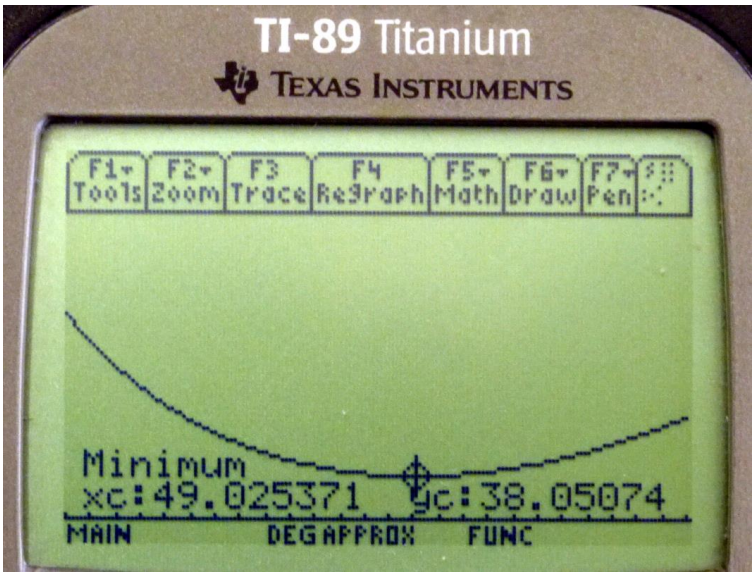
Setzt man das ein, erhält man die gewünschte Gleichung

$$\beta' = \arcsin\left(\sin\left(60° - \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)\right) \cdot n\right)$$

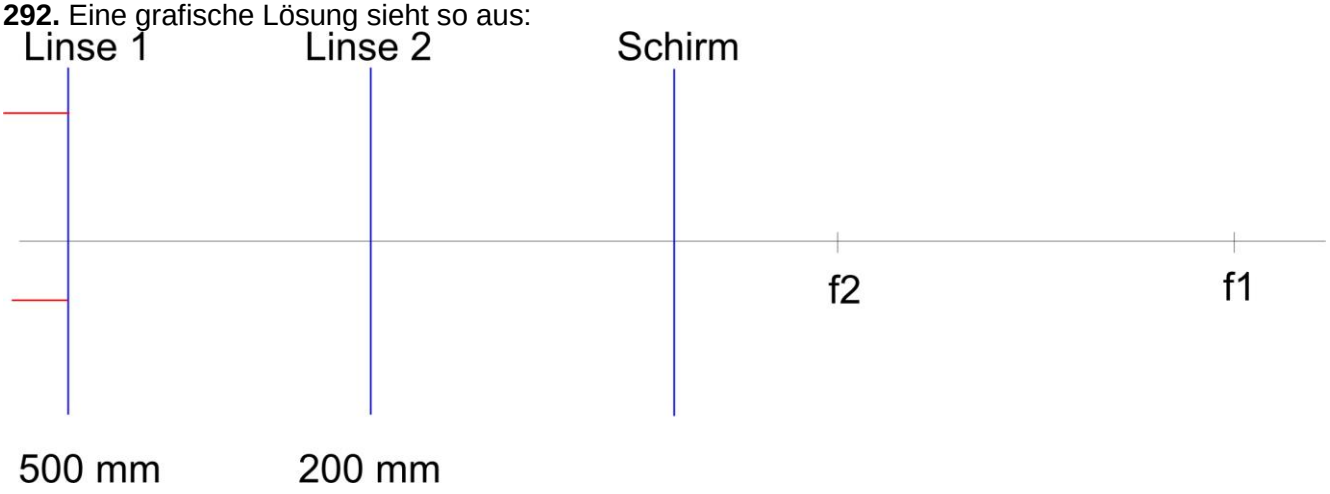
Damit geht man nun endlich in die vorhin gefundene Gleichung:

$$\gamma = \alpha - 60° + \arcsin\left(\sin\left(60° - \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)\right)\cdot n\right)$$

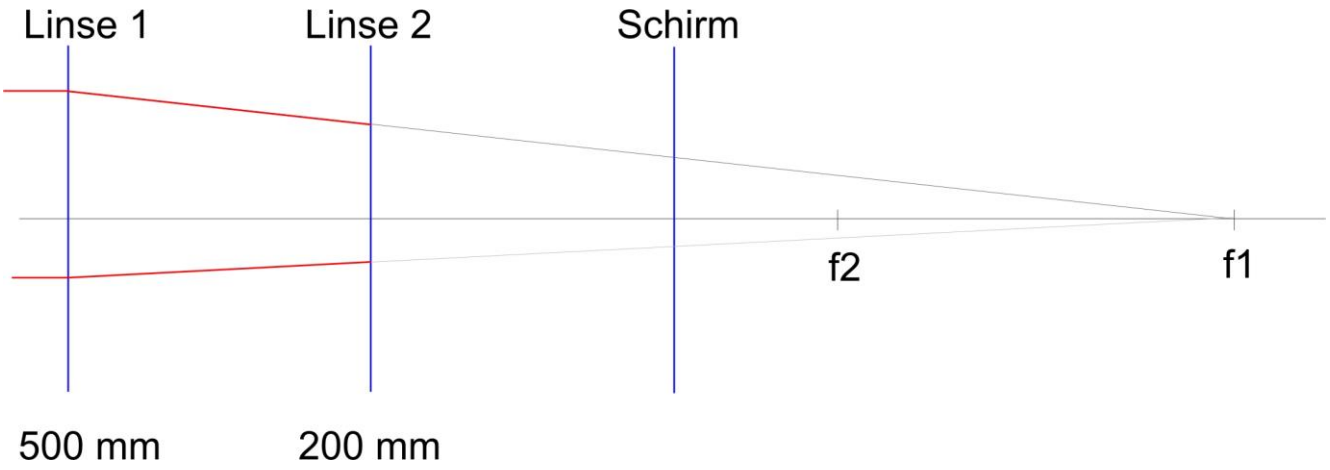
Diese Gleichung kann im grafischen Taschenrechner dargestellt und das Minimum bestimmt werden. Es liegt bei einem Einfallswinkel von 49°. Die Ablenkung des Strahls beträgt dann nur noch 38°.



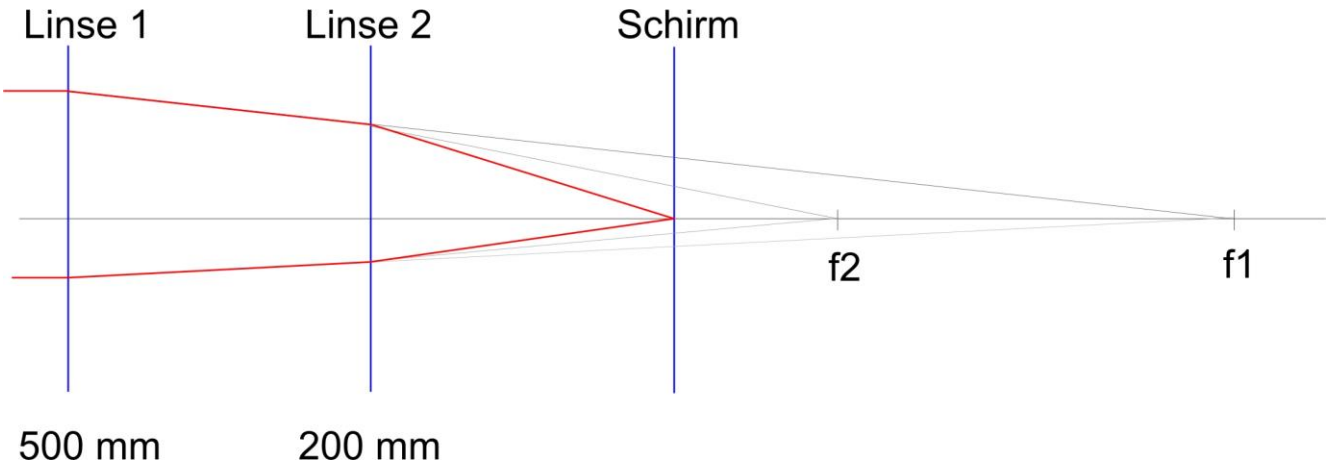
292. Eine grafische Lösung sieht so aus:



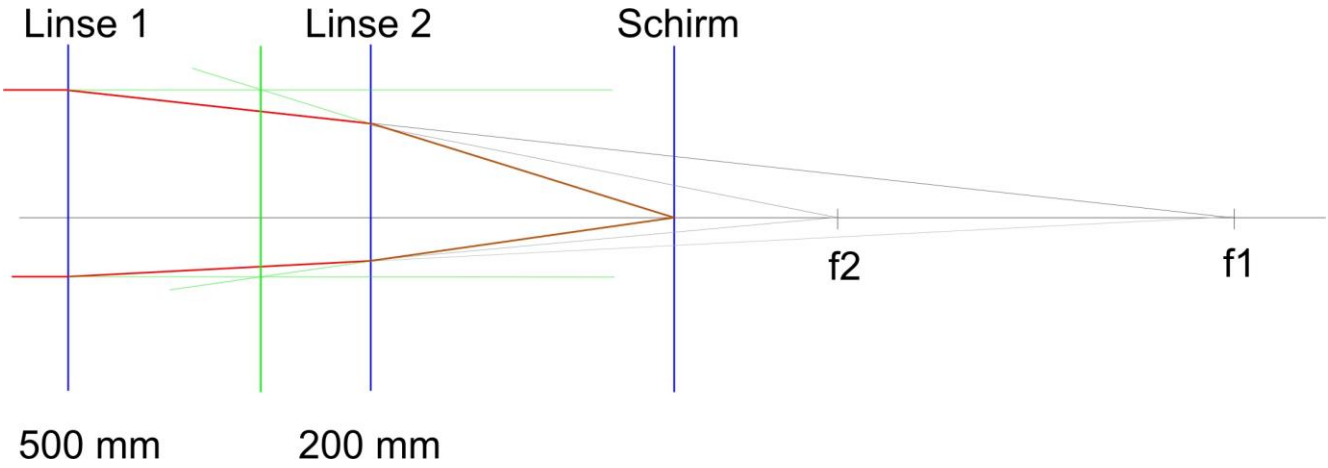
Die Linsen, der Schirm und die Brennpunkte im richtigen Maßstab.



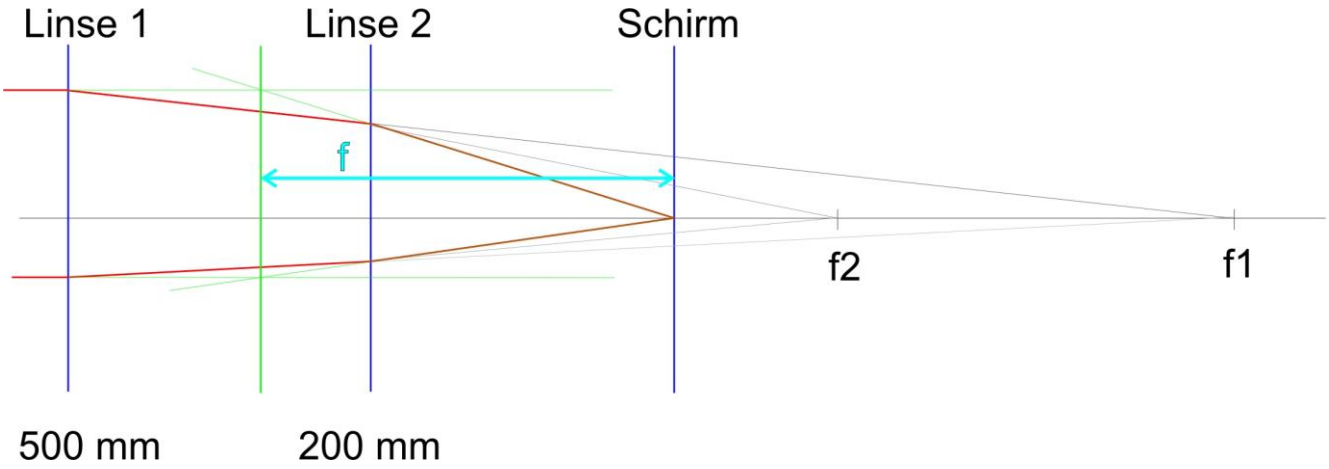
Linse 1 lenkt die Strahlen zum Brennpunkt 1. Vor dem Erreichen treffen die Strahlen aber auf Linse 2.



Linse 2 lenkt die Strahlen auf den beobachteten Punkt auf dem Schirm. Da die Strahlen nicht parallel zur optischen Achse kommen, treffen sie sich schon vor dem Brennpunkt.



Konstruktion der Linse, die das gleiche macht wie die beiden Linsen zusammen.



Das ist die gesuchte Brennweite. Die Messung ergibt etwa 178 mm Brennweite.

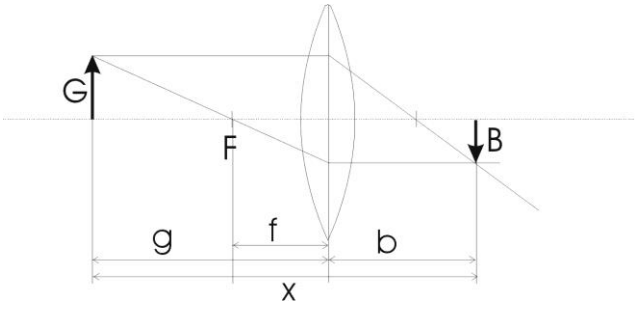
Man kann die Brennweite auch mit der nach Allvar Gullstrand benannten Formel berechnen:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1 \cdot f_2}$$

d ist der Abstand zwischen den beiden Linsen.
Damit erhält man eine Brennweite von 175 mm, was mit der Konstruktion gut übereinstimmt.

185.

Diese Aufgabe ist eine typische Extremwertaufgabe. Gesucht ist das Minimum der Strecke x in Abhängigkeit von g oder b.
Bekannt sind:



$$x = b + g$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

$$g = \frac{f \cdot b}{b - f}$$

Durch Einsetzen erhält man dann

$$x = b + \frac{f \cdot b}{b - f}$$

Will man das Minimum für x erhalten, muss man die 1. Ableitung dieser Funktion nach b gleich 0 setzten und b berechnen.
Die Ableitung von b ergibt 1.
Der zweite Summand ist ein Quotient. Es gilt die Quotientenregel

$$x' = 1 - \frac{f^2}{(b - f)^2}$$

$$0 = 1 - \frac{f^2}{(b - f)^2}$$

Löst man diese Gleichung auf, erhält man 2 Lösungen:

$$b = 0$$

$$b = 2 \cdot f$$

Man kann nun noch mit der 2. Ableitung zeigen, dass für b = 2f wirklich ein Minimum eintritt.
Ist die Bildweite aber 2f, dann muss der Gegenstand auch im Abstand 2f vor der Linse stehen.
Damit ergibt sich für den minimalen Abstand zwischen Bild und Gegenstand die vierfache Brennweite.