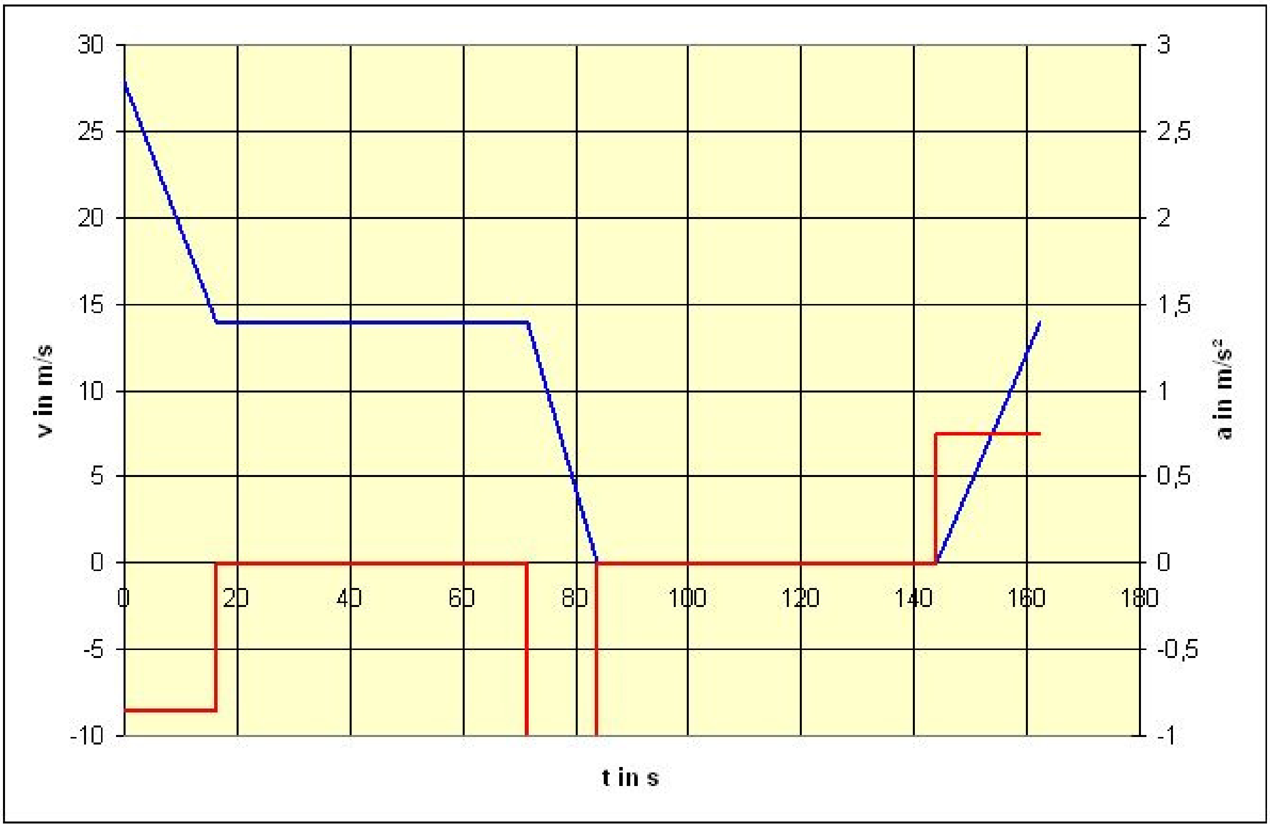
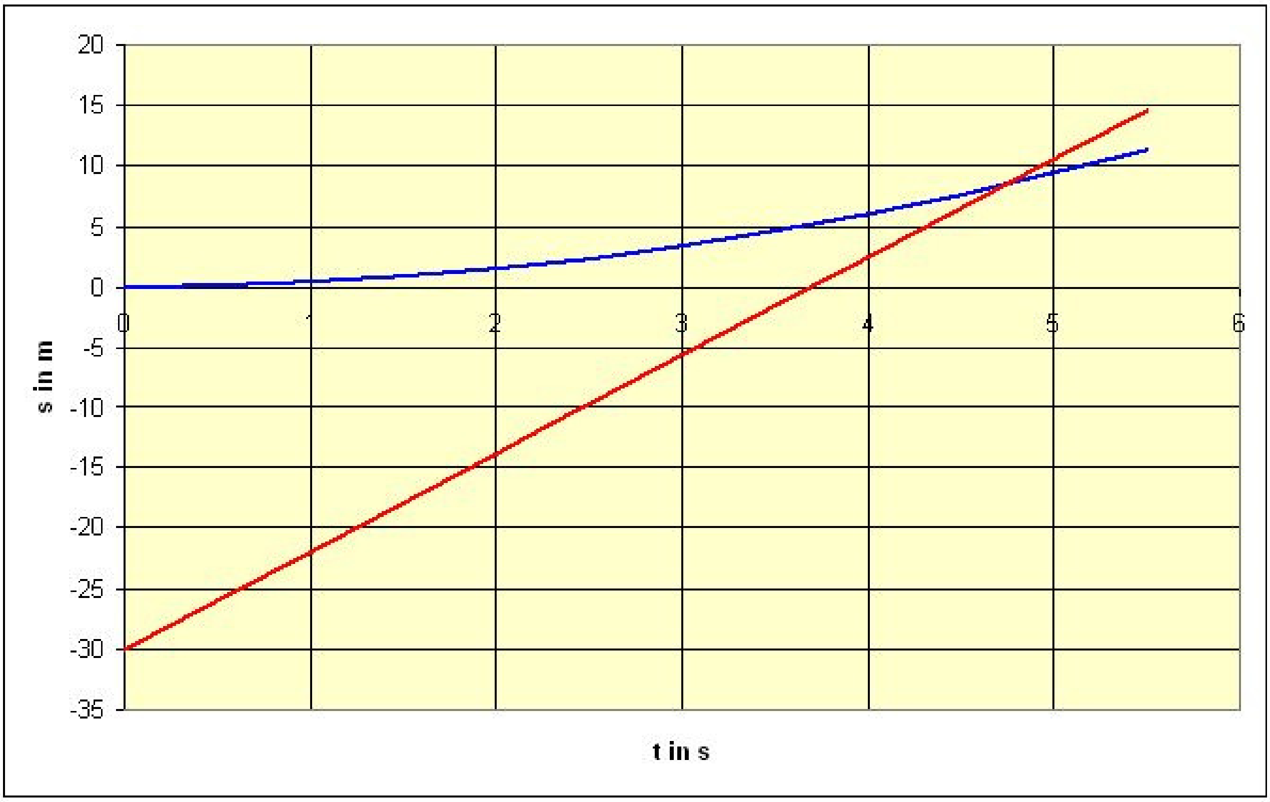
Aufgaben gleichmäßig beschleunigte Bewegung

671. (Abi 1995, Grundkurs)
Vor der Einfahrt in einem Bahnhof bremst der Lokführer einen Zug mit der Beschleunigung –0,850 ms^{-2} von 100,0 kmh^{-1} auf 50,0 kmh^{-1} ab und fährt mit dieser Geschwindigkeit 55,0 s weiter. Er bremst dann mit der Beschleunigung –1,10 ms^{-2}, bis der Zug am Bahnsteig zum Stillstand kommt.
Nach einer Minute Aufenthalt fährt er mit der Beschleunigung 0,750 ms^{-2} wieder an, bis der Zug erneut die Geschwindigkeit von 50,0 kmh^{-1} erreicht hat.
a) Zeichnen Sie nach Berechnung das v-t-Diagramm und das a-t-Diagramm für diesen Vorgang.
b) Ermitteln Sie den insgesamt zurückgelegten Weg.
Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit für den gesamten Vorgang.
c) Während des Zughaltes am Bahnsteig fährt auf einem Parallelgleis eine Rangierlok mit der konstanten Geschwindigkeit 29 kmh^{-1} in Fahrtrichtung des Reisezuges. Als sich der Zug in Bewegung setzt, ist sie noch 30 m vom Zugende entfernt.
Berechnen Sie den Weg, den der Zug nach dem Stillstand zurückgelegt hat, bis die Rangierlok mit dem Zugende erstmals auf gleicher Höhe ist.
Skizzieren Sie beide *s-t*-Diagramme für die Zeit 0s bis 8 s in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

566. Ein S-Bahnzug fährt in 5 min von einer Stadion zu einer 5 km entfernten Station. Von dieser Zeit benötigt er 0,5 min zum gleichmäßig beschleunigten Anfahren und 0,5 min zum gleichmäßig verzögerten Abbremsen. Dazwischen fährt er mit einer konstanten Geschwindigkeit. Wie groß ist diese?

Lösungen


30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
v in m/s
a in m/s²
t in s


20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
0
1
2
3
4
5
6
s in m
t in s

geg.:	$a_1 = -0,850\,\frac{m}{s^2}$ $v_1 = 100\,\frac{km}{h} = 27,8\,\frac{m}{s}$ $v_2 = 50\,\frac{km}{h} = 13,9\,\frac{m}{s}$ $t_2 = 55,0\,s$ $a_2 = -1,10\,\frac{m}{s^{-2}}$ $v_3 = 0\,\frac{m}{s}$ $t_4 = 60\,s$ $a_3 = 0,750\,\frac{m}{s^{-2}}$	ges.:	
Lösung:	a) Zum Zeichnen des v-t-Daigramms benötigt man für den ersten Abbremsvorgang die Zeit. Es gilt: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $\Delta t = \frac{\Delta v}{a}$ $\Delta t = \frac{v_2 - v_1}{a}$ $\Delta t = \frac{-13,9\,\frac{m}{s}}{-0,850\,\frac{m}{s^2}}$ $t_1 = 16,3\,s$ Das gleiche macht man für die Zeit der zweiten Abbremsung und erhält $t_3 = 12,6\,s$ sowie die Zeit für den Beschleunigungsvorgang nach dem Halt: $t_5 = 18,5\,s$ b) Der gesamte Weg setzt sich aus 4 Teilwegen zusammen, die einzeln berechnet werden müssen. 1. Abbremsen $s_1 = \frac{a_1}{2} \cdot t_1 + v_1 \cdot t_1$ $s_1 = \frac{-0,850\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (16,3\,s)^2 + 27,8\,\frac{m}{s} \cdot 16,3\,s$ $s_1 = -112,9\,m + 453,1\,m$ $s_1 = 340,2\,m$ 2. gleichförmige Bewegung $s_2 = v_2 \cdot t_2$ $s_2 = 13,9\,\frac{m}{s} \cdot 55\,s$ $s_2 = 764,5\,m$		

	3. Abbremsen auf 0. $s_3 = \frac{a_2}{2} \cdot t_3 + v_2 \cdot t_3$ $s_3 = \frac{-1{,}10\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (12{,}6\,s)^2 + 12{,}6\,s \cdot 13{,}9\,\frac{m}{s}$ $s_3 = 87{,}8\,m$ Während der Zug im Bahnhof hält, wird kein Weg zurückgelegt. 3. Weg beim Beschleunigen $s_4 = \frac{a_3}{2} \cdot (t_5)^2$ $s_4 = \frac{0{,}750\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (18{,}5\,s)^2$ $s_4 = 128{,}3\,m$ Addiert man alle Wege, erhält man eine Gesamtstrecke von 1320,8 m. Für die Durchschnittsgeschwindigkeit muss dieser Weg durch die gesamte Zeit, die der betrachtete Vorgang dauert, dividiert werden. Insgesamt vergehen 162 Sekunden für Bremsen, Aufenthalt und Beschleunigen. Damit ergibt sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 8,2m/s oder 29,4km/h.
Antwort:	Der Zug legt in dem betrachteten Zeitraum 1320,8 m zurück und hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 29,4 km/h.

c) Das Zugende ist dann mit der Rangierlok auf gleicher Höhe, wenn beide den gleichen Abstand vom Start des Zugendes nach dem Anhalten haben.

$s_{Zug} = s_{Lok}$

Der Weg des Zuges berechnet sich mit der Gleichung für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Für die Rangierlok wird die Gleichung für die gleichförmige Bewegung verwendet. Da die Lok noch 30 m vom Zugende entfernt ist, muss vom Weg der Lok dieser Betrag abgezogen werden.

$$\frac{a}{2} \cdot t^2 = v \cdot t - s_L$$

In dieser Gleichung ist die Zeit als unbekannte enthalten.

$$0 = -\frac{a}{2} \cdot t^2 + v \cdot t - s_L$$

$$0 = \frac{a}{2} \cdot t^2 - v \cdot t + s_L$$

Das ist eine quadratische Gleichung, die zwei Lösungen hat. Zur ersten Zeit überholt die Lok das Zugende. Da der Zug aber immer schneller wird, fährt er der Lok weg und beide haben noch einmal die gleiche Höhe.

$$0 = t^2 - \frac{2 \cdot v}{a} \cdot t + \frac{2 \cdot s_L}{a}$$

$$t_{1/2} = \frac{v}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)^2 - \frac{2 \cdot s_L}{a}}$$

$$t_{1/2} = \frac{8{,}1\,\frac{m}{s}}{0{,}75\,\frac{m}{s^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{8{,}1\,\frac{m}{s}}{0{,}75\,\frac{m}{s^2}}\right)^2 - \frac{2 \cdot 30\,m}{0{,}75\,\frac{m}{s^2}}}$$

$$t_{1/2} = 10{,}8 \pm \sqrt{116{,}6 - 80}$$

$$t_1 = 4{,}8\,s$$

$$t_2 = 16{,}9\,m$$

Nach 4,8 s treffen beide das erste Mal zusammen. Der Zug hat in dieser Zeit einen Weg von 8,6 m zurückgelegt.

geg.:	$t_g = 5\,min = 300\,s$ $s_g = 5\,km = 5\cdot 10^3\,m$ $t_{an} = 30\,s$ $t_{ab} = 30\,s$	ges.:	v_{gl}
Lösung:	Die Bewegung setzt sich aus drei Teilen zusammen: Anfahren, gleichförmige Bewegung und Abbremsen. Damit ergibt sich für den Gesamtweg: $s_g = s_{an} + s_{gl} + s_{ab}$ Man kann nun die Gleichungen für die Wege einsetzen: $s_g = \frac{a}{2}\cdot t_{an}^2 + v_{gl}\cdot t_{gl} + \frac{a}{2}\cdot t_{ab}^2$ Da das Anfahren und das Abbremsen in der gleichen Zeit passiert und der Vorgang von Null oder bis Null geht, wirkt bei beiden die gleiche Beschleunigung, nur beim Abbremsen eben negativ und der erste und dritte Summand können zusammengefasst werden: $s_g = a\cdot t_{an}^2 + v_{gl}\cdot t_{gl}$ Die Beschleunigung berechnet sich mit: $a = \frac{v_{gl}}{t_{an}}$ Als Geschwindigkeit wird die gesuchte Geschwindigkeit für die gleichförmige Bewegung eingesetzt, da die ja das Ende des ersten und der Anfang des zweiten Beschleunigungsvorganges ist. Die Zeiten sind bekannt, der Zug fährt 240 s mit der konstanten Geschwindigkeit. Damit wird aus der Weggleichung: $s_g = \frac{v_{gl}\cdot t_{an}^2}{t_{an}} + v_{gl}\cdot t_{gl}$ $s_g = v_{gl}\cdot t_{an} + v_{gl}\cdot t_{gl}$ $s_g = v_{gl}\cdot (t_{an} + t_{gl})$ $v_{gl} = \frac{s_g}{t_{an} + t_{gl}}$ $v_{gl} = \frac{5\cdot 10^3\,m}{30\,s + 240\,s}$ $v_{gl} = 18{,}5\,\frac{m}{s}$ $v_{gl} = 66{,}7\,\frac{km}{h}$		
Antwort:	Der S-Bahnzug fährt mit einer maximalen Geschwindigkeit von 66,7 km/h.		